



ARTÍCULOS

La Teoría del Multiplicador, su aplicación en las economías no desarrolladas, en particular Argentina

Estela M. Bee de Dagum

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 7, No. 3-4 (1963): 3º y 4º Trimestres, pp. 269-386.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3561>



La Revista de Economía y Estadística, se edita desde el año 1939. Es una publicación semestral del Instituto de Economía y Finanzas (IEF), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Valparaíso s/n, Ciudad Universitaria. X5000HRV, Córdoba, Argentina.
Teléfono: 00 - 54 - 351 - 4437300 interno 253.
Contacto: rev_eco_estad@eco.unc.edu.ar
Dirección web <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/index>

Cómo citar este documento:

Bee de Dagum, E. (1963). La Teoría del Multiplicador, su aplicación en las economías No. desarrolladas, en particular Argentina. *Revista de Economía y Estadística*, Tercera Época, Vol. 7, No. 3-4 : 3º y 4º Trimestres, pp. 269-386.

Disponible en: <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3561>

El Portal de Revistas de la Universidad Nacional de Córdoba es un espacio destinado a la difusión de las investigaciones realizadas por los miembros de la Universidad y a los contenidos académicos y culturales desarrollados en las revistas electrónicas de la Universidad Nacional de Córdoba. Considerando que la Ciencia es un recurso público, es que la Universidad ofrece a toda la comunidad, el acceso libre de su producción científica, académica y cultural.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/index>



REVISTAS
de la Universidad
Nacional de Córdoba



Universidad
Nacional
de Córdoba



FCE
Facultad de Ciencias
Económicas



1613 - 2013
400
AÑOS

TESIS

LA TEORIA DEL MULTIPLICADOR. SU APLICACION
A LAS ECONOMIAS NO DESARROLLADAS,
EN PARTICULAR ARGENTINA (*)

(*) Esta Tesis Doctoral fue calificada de sobresaliente por el Tribunal respectivo, con recomendación para su publicación, que fue aprobada por Resolución N° 1348 del H. Consejo Directivo, que a continuación se transcribe: Art. 1º) Disponer la publicación de la Tesis de la Doctora ESTELA MARÍA BEE DE DAGUM en la Revista de la Facultad. Art. 2º)) Solicitar a la Imprenta de la Universidad, la impresión de la Tesis de la Doctora ESTELA MARÍA BEE DE DAGUM en la cantidad de doscientos cincuenta ejemplares. Art. 3º) Comuníquese, publíquese y archívese. Dada en la Sala de Sesiones del Honorable Consejo Directivo de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Córdoba, a catorce días del mes de mayo del año mil novecientos sesenta y tres. Fdo. LUIS S. SERRANO, Vice-Decano. *Elias Boyallán*, Secretario.

SÓCRATES: En buena hora. ¿Por donde comenzaremos esta controversia, que tiene muchas ramificaciones y muchas formas? ¿No es por aquí?

PLATÓN, Diálogos Escogidos:
Filebo o del Placer.

P R E F A C I O

La Teoría del Multiplicador ha sido ampliamente tratada y los economistas, en general, le han destinado un lugar importante en sus obras, ya sea simplemente para exponerla o bien para mejorarla o completarla, desde su aparición en el mundo de la Ciencia Económica, debida a R. F. Kahn.

La misma suscitó numerosas controversias y así hubo quienes le atribuyeron excesivo valor y otros, por el contrario, le negaron utilidad alguna. Es decir, aquéllos que hicieron de ella un tabú y aquéllos que la consideraron la quinta rueda inútil.

Justamente, mi propósito ha sido analizar los distintos aspectos de la Teoría del Multiplicador y tratar de fijar si la misma es válida en todo tipo de economía, cualquiera sea su grado de desarrollo o si en cambio, deben cumplirse ciertos requisitos previos para su buen funcionamiento, distinguiendo el proceso monetario del proceso real de la multiplicación.

En los cinco primeros capítulos me he referido a los distintos multiplicadores, haciendo un análisis estático y dinámico de ellos, previa una breve introducción histórica. Los dos primeros, estudian los multiplicadores en una economía cerrada y los tres últimos lo hacen para una economía abierta, o sea, que se hace intervenir el comercio internacional. En éstos he analizado el multiplicador de exportación (tanto exportación autónoma como inducida) para el caso de dos países únicamente y luego para más de dos países, siguiendo fundamentalmente los modelos de Machlup.

El capítulo sexto presenta las conclusiones sobre el comportamiento del multiplicador de exportación en los países subdesarrollados (el único de importancia en los mismos).

Sostengo que el multiplicador de exportación es un valioso instrumento que ayuda en el proceso de desarrollo de estas economías, siempre que antes se eliminen ciertas condiciones que estrangulan su funcionamiento y que permiten tan sólo la multiplicación monetaria pero no real del ingreso nacional. Analizo además, la relación que guardan la velocidad con que se logra el proceso de la multiplicación y el valor numérico del mismo.

El capítulo séptimo da un cálculo hecho para Argentina considerando en un caso el comercio con Gran Bretaña y en el otro el comercio con Estados Unidos. El valor obtenido para el multiplicador de exportación en ambos casos, debe ser considerado como una primera aproximación ya que para el período considerado 1950-59, contaba con escasas estadísticas útiles y no se habían hecho para el país, cálculos de las propensiones marginales a consumir bienes nacionales, a ahorrar e importar. Incluso no conozco que se hayan hecho, para el "mismo período" cálculos de las mismas propensiones en los dos países extranjeros que intervinieron.

Por último, quiero expresar mi agradecimiento al Instituto Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas que hizo posible la realización de este trabajo mediante una beca que me otorgara por todo el año 1959 para tal fin; a mi esposo, Profesor Doctor Camilo Dagum, quien me sugirió el tema y leyó por primera vez mi manuscrito aconsejándome importantes modificaciones, especialmente, en la parte matemática, al Señor Director del Instituto de Estadísticas y Matemáticas, Profesor Doctor José Yocca por haber puesto a mi disposición el material estadístico y la biblioteca especializada, como así también las máquinas de calcular. A la Señorita Es-

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

ther Ortelli, por su colaboración en la elaboración y corrección de los cálculos así como de las pruebas de imprenta y a la Señora Juana Fanjul de Gigena, por su gentileza de realizar la última versión mecanografiada de este trabajo.

Por supuesto, queda claro que soy la única persona responsable de las ideas y de los errores, que hubieren en esta obra.

ESTELA MARÍA BEE DE DAGUM

mayo de 1960.

EL MULTIPLICADOR EN UNA ECONOMIA CERRADA

1. 1. *Breve Reseña Histórica.*

El multiplicador puede definirse como la relación funcional entre dos variables económicas.

El concepto del multiplicador como tal es de validez permanente, o sea independiente del tiempo y del grado de desarrollo de la economía en que funcione. Existirá siempre que quiera medirse el efecto marginal de una variable exógena (independiente) sobre otra variable endógena que es función de aquélla.

Las variables no tienen porque ser necesariamente económicas sino que pueden ser sociales, biológicas, etc. Como aquí se trata el proceso de la multiplicación en Economía es que trabajamos con variables económicas.

Los multiplicadores más difundidos y más criticados son el multiplicador de inversión y el multiplicador de consumo. Fueron los primeros en ser expresados en una formulación matemática e introducidos por Keynes en un momento histórico trascendental para la Ciencia Económica. Paradójicamente ellos son los de menos utilidad hoy en día, y no sin razón Hart los denominó "la quinta rueda inútil" pues constituyen una tautología.

En relación a su origen histórico, Di Fenizio, expresa que (1): "Aunque en la Teoría General, Keynes escribe que el concepto del multiplicador fue introducido por primera

(1) DI FENZIO, Ferdinando, Economía Política, Editorial Bosch, Barcelona, 1955, pág. 560-61.

vez en la teoría económica por R. F. Kahn en su artículo "The relation of home Investment to Unemployment", publicado en el *Economic Journal* en 1931, el multiplicador tiene una historia un poco más larga.

Sostiene Dillard que el primer concepto del multiplicador se debe a Keynes y fue Kahn quien lo elaboró en forma precisa. Ocurrió en 1929 en plena campaña electoral. Lloyd George era el jefe del Partido Liberal, Stanley Baldwin y Ramsey Mc.Donald dirigían el Partido Conservador y Laborista respectivamente. Lloyd George, para combatir la desocupación propuso un programa de obras públicas y en apoyo del mismo, Keynes, en colaboración con H. D. Henderson, dio a publicidad un folleto titulado, "Can Lloyd George do it? An examination of the Liberal Pledge". En el folleto se sostenía que Lloyd George podía hacerlo sin que un programa de obras públicas aumentara los impuestos. Se decía que la ocupación primaria y secundaria determinarían un aumento en la renta nacional sujeta a tributación, mientras que la disminución en los gastos, en concepto de subsidios a los parados, compensaría los gastos adicionales para obras públicas.

A. Ll. Wright ⁽²⁾ va un poco más atrás en cuanto al origen del multiplicador, y así sostiene que la palabra multiplicador y su adopción en Economía fue hecha mucho antes que Kahn formulara una expresión matemática del mismo. Lo más antiguo que se conoce fue la utilización del concepto por Bagehot ⁽³⁾ en 1880 en conexión con la teoría de la demanda efectiva. Más tarde, Johannsen ⁽⁴⁾ en la tercera década del siglo hizo uso de la palabra "principio multiplicador" en conexión a un proceso similar al del multiplicador moderno.

(2) WRIGHT, A. LL. "The Genesis of the Multiplier Theory" en *Oxford Economics Papers*, Nueva serie, N. 2, junio 1956.

(3) BAGEHOT, W. "Lombard Street", Londres 1882, págs. 126-127.

(4) JOHANNSEN, N. "Business Depressions, Their Cause", Nueva York, 1925, pág. 5.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

En 1930, un economista norteamericano poco conocido V. A. Mund (5) habló de "gastos multiplicadores" aplicado también a un modelo de multiplicador.

Y contrariamente a lo que se supone cuando Kahn escribió su artículo no utilizó el término multiplicador sino la palabra "cociente (ratio)" y el concepto del multiplicador si bien no había logrado una seria formulación matemática era bien conocido dentro del ambiente de los economistas de la época.

Se encuentra aquí el origen de la teoría del multiplicador y un ejemplo más sobre el cual se debe meditar cada vez que se plantee el problema general entre Teoría e Historia Económica.

El multiplicador no se difundió rápidamente en sus comienzos, debido a que Kahn había supuesto un multiplicador igual a 10 y lo había aplicado para la determinación del incremento de la ocupación total ante un incremento de la ocupación primaria, lo que hizo suponer que el multiplicador era algo muy complejo y de limitada aplicación.

Cuando en 1936, Keynes dio a luz su obra fundamental, con la que marcó una nueva etapa en la ciencia económica, recién entonces el multiplicador se divulgó.

La teoría fue posteriormente sometida a importantes refinamientos, que la liberaron de las barreras representadas por los esquemas estáticos dentro de los cuales Keynes la había confinado.

Keynes, aplicó el multiplicador, en la determinación del ingreso nacional, en lugar de la teoría del empleo como lo había hecho Kahn. Su multiplicador, el multiplicador de inversión, suponía que "la propensión a consumir" era constante, con-

(5) MUND, V. A. "Prosperity Reserves of Public Works" *Annals of the American Academy of Political and Social Sciences*, mayo 1930.

cepto este, que también era introducido por primera vez en la ciencia económica.

Ambos autores creyeron que el proceso acumulativo se hacía en forma instantánea o bien si no lo creyeron ya que en cierto modo es imposible concebir lógicamente un multiplicador estático, indudablemente no encontraron el modo de expresarlo "dinámicamente", tarea que correspondió a autores posteriores. Se trató así de "dinamizar" el multiplicador, estudiando su proceso en distintos períodos de tiempo. Este aspecto fue particularmente considerado por J. M. Clark, en su obra, "Cumulative Effects and Changes in Aggregate Spending as Illustrated by Public Works"; por Bresciani-Turoni, en, "The Multiplier in Practice" y Paul Samuelson, en, "A Fundamental Multiplier Identity". Para esa misma época, otros autores, entre ellos James Angell y Oscar Lange introdujeron el concepto del multiplicador "acumulativo" que considera dos o más relaciones marginales, en lugar de una sola relación marginal, como lo hacían los multiplicadores anteriores, conocidos desde entonces como "simples".

Más tarde, habría de ampliarse su campo de aplicación, admitiéndose que no sólo la inversión o el consumo son multiplicandos en la determinación del volumen de la renta nacional, sino también, la creación de nuevo poder de compra, o el excedente favorable de la balanza de pagos.

Se produjo con esto, una renovación de la teoría del comercio internacional, aplicándose un multiplicador, (dependiente de la propensión a importar) a un multiplicando que consiste en los saldos positivos del comercio internacional de una nación.

Entre los que más contribuyeron al estudio de este "multiplicador de exportación", citaremos a, Colin Clark, en "Determination of the Multiplier from National Income Statistics", Fritz Machlup, en "International Trade and the National In-

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

come Multiplier”, J. J. Polak y G. Haberler, en “The Foreign Trade Multiplier, H. Brems, en “A Generalization of the foreign Trade Multiplier” y otros.

Por último, debemos citar a aquellos que hicieron estudios sobre la relación e interacción entre el multiplicador (entendiendo por tal, el multiplicador simple de inversión) y el principio de aceleración. La primera formulación se debe a Paul Samuelson, en su artículo “Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration”, 1939; luego Hansen en, “Fiscal Policy and Income Determination”, más tarde Hicks, en 1950, en su obra, “A contribution to the theory of the Trade Cycle” y otros.

Se ha considerado que este nuevo enfoque constituye una teoría completa de las fluctuaciones y que el multiplicador (en el sentido ya dado) y el principio de aceleración, aisladamente, no son más que teorías a medias que complementadas dan lugar a la teoría de las fluctuaciones.

1. 2. *Introducción a la Teoría.*

Al aplicar la teoría del multiplicador como instrumento de análisis en la determinación del ingreso nacional resulta indispensable distinguir los elementos de la teoría.

Todo gasto generador de renta se divide en dos clases: a) autónomo y b) inducido. El gasto autónomo es exógeno al modelo y constituye la variable explicativa del mismo. El gasto inducido es aquel que depende de factores dinámicos endógenos y será explicado por el modelo.

Todo gasto autónomo se llama “inyección” y aunque en principio parezca fácil su determinación, en la práctica resulta bastante difícil aislarlo. Así, en el multiplicador de inversión, pueden considerarse gastos autónomos las inversiones públicas y privadas, los subsidios, los gastos de guerra y los gastos en

consumo de bienes duraderos y serían gastos inducidos, los gastos en consumo de bienes perecederos y en servicios.

En cambio, en el multiplicador de consumo se considera inyección un gasto en consumo y son gastos inducidos las inversiones que son consecuencia de cambios en el nivel del ingreso nacional. Tanto unos como otros, integran el monto en que aumenta la renta nacional.

Es muy importante, además, considerar el sistema económico dentro del cual se va a realizar el proceso de la multiplicación. Pues si bien he afirmado que el multiplicador es de validez universal me he referido al "concepto" en sí, en tanto que el "proceso" está sujeto a profundas modificaciones según sea el sistema en el que se desarrolle. Las variaciones afectan no solo al valor que puede alcanzar el multiplicador para iguales períodos de tiempo sino también a la velocidad en que se logrará un nuevo nivel de equilibrio del ingreso nacional.

Si el sistema económico se supone cerrado y se hacen intervenir las tres unidades fundamentales a saber: a) empresario, b) familias y c) estado, se consideran multiplicando las inversiones tanto públicas como privadas y los aumentos en los gastos de consumo. Siendo filtraciones el ahorro y los impuestos, en la medida que reducen el gasto en consumo o inversión privada y no son balanceados por sus equivalentes estatales. En un caso aun más simple, donde se supone que no interviene el sector público, la única filtración la constituye el ahorro siendo multiplicando solamente los cambios en la inversión y el consumo privados. Tal es el modelo keynesiano.

En un sistema económico abierto (caso más real que los dos anteriores) aparecen nuevas variables y parámetros para completar el modelo. Se agregan a las filtraciones, las importaciones y el factor de repercusión del exterior y como multiplicando las exportaciones autónomas o los saldos favorables de la balanza de pagos.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

En la primera parte de este trabajo se analiza el multiplicador en una economía cerrada, yendo del caso más simple al más completo con el propósito de simplificar el problema y hacerlo más accesible. Luego se trata el multiplicador en una economía abierta o sea el multiplicador del comercio exterior y por último se utiliza uno de los modelos presentados para hacer un cálculo para Argentina previa modificación del mismo para adaptarlo a la realidad económica tanto nuestra como de Latinoamérica en general.

En todos los modelos se considera: 1) Un comportamiento lineal y homogéneo de las importaciones y del consumo; 2) Que los precios y los términos de intercambio permanecen estables; y 3) Una cierta distribución invariable de la renta.

1. 3. *Multiplicadores simples*

Análisis Estático de los Multiplicadores Simples

Se llaman multiplicadores simples aquellos que involucren una sola relación marginal. Estos multiplicadores simples son estáticos cuando no tienen en cuenta el factor tiempo, es decir, el efecto marginal expresado por la fórmula del multiplicador se produce instantáneamente.

Las fórmulas de los multiplicadores estáticos reflejan solamente los valores que la variable endógena tiene en dos posiciones de equilibrio del sistema, diferenciándose en los valores de la variable exógena. Pero nada se dice del tiempo que toma para pasar de una posición de equilibrio a otra, ni menos aún sobre su comportamiento en el período de transición.

Estos multiplicadores simples ya sean estáticos o dinámicos, pueden darse en una economía cerrada o en una economía abierta.

En el primer caso, se considera generalmente la no intervención del comercio internacional en la determinación de la

renta nacional, o sea, en nuestro caso, se considera el efecto marginal que sobre el ingreso nacional tiene un gasto interno y no las exportaciones autónomas o inducidas.

Decimos, "generalmente la no intervención del comercio internacional" porque el concepto de sistema, mercado o economía "cerrada" o "abierta", como todo concepto en economía, está sujeto a una cierta arbitrariedad en su delimitación, pues el mundo como un todo es una economía cerrada y cualquier parte de una nación puede considerarse como una economía abierta, en un sistema interregional.

Dentro de los multiplicadores simples estáticos consideramos el multiplicador de inversión y el multiplicador de consumo, como los dos multiplicadores de algún interés que se derivan de ciertas relaciones implícitas en las cuentas del ingreso nacional. La más importante de estas relaciones es que el ingreso nacional de un cierto período es igual a la suma del consumo y la inversión de la comunidad para ese período. De esta relación Keynes determinó el multiplicador de inversión, que es aquel que mide el efecto marginal que sobre el ingreso nacional produce un cambio en la proporción de las inversiones. Dicho multiplicador es función de la propensión marginal a consumir.

Hacemos $c' = c'(Y)$ a la propensión marginal a consumir, e I la inversión autónoma, siendo esta última variable exógena y c' un parámetro. Partiendo de $Y = C + I$, determinamos analíticamente el multiplicador de inversión:

$$(1) \quad dY = dC + dI$$

dividiendo ambos miembros por dY tenemos:

$$(2) \quad \frac{dC}{dY} + \frac{dI}{dY} = 1$$

De donde

$$(3) \quad \frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - c'} = \frac{1}{1 - c'}$$

siendo $\frac{1}{1 - c'}$ el multiplicador de inversión y $c' = \frac{dC}{dY}$ la propensión marginal a consumir. Si en lugar de considerar I como variable exógena, consideramos a C, e $i' = i'(Y)$ obtenemos el multiplicador de consumo

$$(4) \quad \frac{dY}{dC} = \frac{1}{1 - i'} = \frac{1}{1 - i'}$$

donde $\frac{1}{1 - i'}$ es el multiplicador de consumo e $i' = \frac{dI}{dY}$ es la propensión marginal a invertir. El multiplicador de consumo mide el efecto marginal que sobre el ingreso nacional producen las inversiones inducidas de un cambio en la proporción del consumo. Tanto el multiplicador de inversión como el de consumo son dos aspectos de un mismo fenómeno, o sea, que uno es la contraparte simétrica del otro.

1. 4. *Análisis Dinámico de los Multiplicadores Simples*

A continuación analizamos, el multiplicador simple de consumo y el multiplicador simple de inversión, desde un punto de vista dinámico y no estático, como lo hemos hecho anteriormente.

Al considerarlos dinámicamente, explicamos el "proceso de propagación del ingreso" y con ellos podemos determinar el tiempo en que se alcanza la nueva situación de equilibrio.

Suponemos, en nuestro caso, que el retraso entre el ingreso y el gasto es de una unidad de tiempo, el cual está medido por la velocidad-ingreso del dinero. Hicks, en su libro "Trade Cycles", nos dice, que, "en el análisis dinámico del multiplicador, los retrasos más importantes en el consumo no son precisamente los producidos por los retardos entre la percepción de los salarios y su gasto, sino los que se originan por la percepción de sueldos y más aún, los beneficios. Lo cual se cumple evidentemente en cualquier tipo de economía.

En los dos últimos casos debemos distinguir: 1º) el tiempo que transeurre entre la obtención efectiva de la renta y su paso al control del consumidor y 2º) el tiempo entre la adquisición del consumidor del poder del gasto y su utilización. Esto implica, retardos considerables.

El primero es de necesidad contable pues hay que comprobar la obtención del beneficio y luego su distribución.

El segundo, es en cierto modo, generado por la misma característica de percepción del ingreso, lo que hace que el consumidor trate de distribuir en el tiempo su gasto, de modo que no fluctúe en la misma forma que su renta.

Tinbergen, basado en los datos británicos del período anterior a 1914, dedujo que para entonces, el consumo proveniente de ingresos distintos del salario venía retardado normalmente, en un año aproximadamente.

De modo, entonces, que si el consumo reaccionara instantáneamente, tendríamos inmediatamente un movimiento hacia el equilibrio. Si en cambio, el consumo, se retardara uniformemente, como es el caso que consideramos a continuación, la convergencia hacia el equilibrio es muy lenta.

Hago notar, que en este análisis dinámico, me baso fundamentalmente en el concepto que Hicks y Frisch dan sobre

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

la dinámica económica. Para Hicks es "aquella parte de la teoría económica en la cual todas las cantidades deben estar fechadas". Para Frisch, "la característica esencial de una teoría dinámica, es aquella, en la cual consideramos las magnitudes de ciertas variables en diferentes momentos, o introducimos ciertas ecuaciones que abarcan al mismo tiempo, varias de estas magnitudes pertenecientes a instantes diferentes".

Para esta parte de la teoría del multiplicador la concepción de la dinámica económica de Harrod, no se da, pero si la tendremos cuando analicemos, dinámicamente, los multiplicadores compuestos. Para Harrod, "la dinámica es el estudio de una economía en la cuál cambia el ritmo de la producción". Lo que importa suponer, que la inversión se expansiona o se contrae continuamente o cambia de un movimiento a otro y no es el caso relativamente "estático" de un simple cambio en el tipo de inversión.

Después de estas disgregaciones previas se analiza el multiplicador dinámico simple del consumo y de la inversión. (Lo hacemos dentro del campo discreto siendo fácil extenderlo al campo continuo, de allí que se trabaje con ΔI en lugar de dI).

Para determinar el monto del gasto inducido a partir del incremento autónomo de las inversiones ΔI en el multiplicador de inversión, en cualquier período de tiempo, planteamos la siguiente ecuación entre diferencias finitas:

$$(5) \quad E(t) = c' E(t-1)$$

donde $E(t)$ es el gasto inducido en el período t , o efecto multiplicador en el período t , de la dosis inicial de inversión ΔI ; y c' es la propensión marginal a consumir. Siendo la condición inicial $E(0) = \Delta I$, resolviendo la ecuación (5), resulta,

$$(6) \quad E(t) = (c')^t \Delta I$$

que es la solución de (5).

Como ΔI es positiva y c' también, pero menor que uno, el gasto directamente inducido por el gasto inicial será siempre positivo, pero irá disminuyendo con el tiempo.

Aplicando sumatorio, tenemos,

$$(7) \quad \sum_{t=0}^{\infty} E(t) = \Delta I \sum_{t=0}^{\infty} (c')^t = \Delta Y$$

de donde

$$(8) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \sum_{t=0}^{\infty} (c')^t = \frac{1}{1 - c'}$$

que es el multiplicador simple dinámico de inversión. Con el mismo procedimiento podemos calcular el monto del gasto inducido en un momento t , a partir directamente del incremento en los gastos de consumo ΔC y considerando, en lugar de c' , la propensión marginal a invertir i' ; con lo cual, al aplicar sumatorio a la solución particular, obtenemos el multiplicador simple dinámico de consumo.

$$(9) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta C} = \sum_{t=0}^{\infty} (i')^t = \frac{1}{1 - i'}$$

Tanto en (8) como en (9), es condición indispensable que c' e i' sean menores que 1 para que la serie converja a un límite ya que $\sum c'^t$ ó $\sum i'^t$ es una serie geométrica convergente para $|c'| < 1$ e $|i'| < 1$.

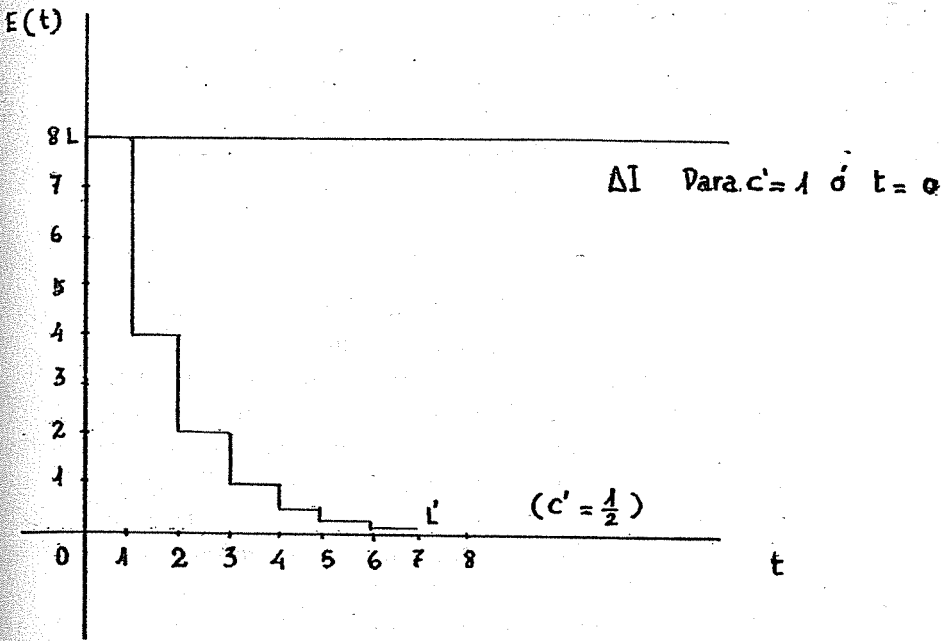
Gráficamente podemos representar el comportamiento de la ecuación entre diferencias finitas,

$$E(t) = (c')^t \Delta I$$

cuando t y c' son positivos pero $c' < 1$.

La función LL' muestra el comportamiento de la ecuación para $c' = \frac{1}{2}$. La paralela a la abscisa muestra el comportamiento de la ecuación para $c' = 1$ o para $t = 0$, siendo $\Delta I = 8$.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR



Estos multiplicadores simples adolecen de graves defectos que le quitan todo valor práctico. En las relaciones,

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \Delta Y = \frac{1}{1-c'} \Delta I \\ \Delta Y = \frac{1}{1-i'} \Delta C \end{array} \right.$$

los multiplicadores ΔI y ΔC representan, no sólo el incremento autónomo inicial en la inversión y en el consumo respectivamente, sino también los incrementos inducidos, lo que hace muy difícil la determinación del valor de la "inyección" o incremento autónomo inicial. "Esta dificultad fue visible du-

rante el período 1936-40, cuando muchos economistas creyeron que el multiplicador de inversión era negativo debido a que la inversión gubernamental causaba una disminución de la inversión privada, hasta el punto de producir una caída del ingreso nacional, a causa de los alegados efectos adversos sobre la confianza de los empresarios. Pero en realidad, lo que ocu-

rría era que el multiplicando ΔI y no el multiplicador $\frac{1}{1-c'}$ era negativo, si la desinversión privada inducida sobrepasaba el incremento positivo de la inversión pública" (6).

En el multiplicador simple estático no se presenta el problema de las "filtraciones". El ingreso no consumido es por "definición" invertido y en ambos casos el ingreso se gasta ya sea en bienes de consumo o en bienes de inversión. En consecuencia, la propensión marginal a ahorrar $1 - c'$ no tiene significado como filtración, pues los ahorros se gastan; luego "uno menos la propensión a gastar en general" debe ser menor que 1. De otro modo el valor del multiplicador sería infinito; ya que,

$$(11) \quad \frac{1}{1-(c'+i')} = \frac{1}{0} = \infty$$

y un peso de inversión tendría consecuencias explosivas para el sistema económico (7).

(6) SAMUELSON, Paul A.: "fiscal Policy and Income Determination" en Quarterly Journal of Economics; Vol. 56 - agosto 1942 - págs. 576-577.

(7) ANGELL W., James: "Investment and Business Cycles", Mc Graw Hill, New York, 1941 - pág. 196 y siguientes.

MULTIPLICADORES COMPUESTOS

2. 1. *Análisis Estático de los Multiplicadores Compuestos.*

Algunos de los inconvenientes prácticos que presentan los multiplicadores simples son resueltos con los multiplicadores compuestos, los cuales involucran ya, dos o más relaciones marginales. Siguiendo nuestro orden de presentación consideramos a los multiplicadores compuestos, también llamados "acumulativos" (8), en un sistema cerrado, estática y dinámicamente. Tratamos seguidamente el multiplicador compuesto de inversión y el multiplicador compuesto de consumo. En ambos, los cambios inducidos en la inversión y en el consumo respectivamente están comprendidos en el multiplicador y no en el multiplicando.

Además se parte de una definición de ahorro e inversión en un sentido ex-ante, es decir que el ahorro planeado no debe necesariamente ser igual a la inversión planeada. Lo que supone, en cierto modo un análisis "dinámico", al considerar las filtraciones en los sucesivos períodos de gastos, ya que $(c' + i)$ es menor que uno, lo que significa que $I < S$, o sea que el monto de las filtraciones está medido por la diferencia entre el ahorro y la inversión.

(8) La idea fue sugerida primeramente por el Profesor James W. ANGELL en su libro ya citado y posteriormente por Oscar Lange en nota sobre el libro de Schumpeter, "Business Cycles", en Review of Economics Statistics, nov. 1941, pág. 190 y en "On the theory of Multiplier", en Econometrica, julio-octubre 1943, pág. 230.

No obstante esta consideración, el análisis permanece casi totalmente estático y mantiene este carácter de acuerdo a las definiciones de dinámica económica que han sido dadas.

Tanto el incremento de la inversión, como el incremento del consumo son constantes y no se determinan ni el período de tiempo del proceso de multiplicación, ni como se realiza el paso de un nivel de equilibrio a otro.

Es necesario nuevamente, hacer notar que los conceptos de "estática" o "dinámica" en economía no están aún perfectamente definidos sino que, un fenómeno económico estará estudiado más o menos dinámicamente, a medida que se acerca o aleja de la realidad. En nuestro análisis dinámico de los distintos multiplicadores, trataremos de ir aproximándonos cada vez más a la realidad, sin por ello querer pretender alcanzar un "record" de dinamismo.

Veremos ahora, sus expresiones analíticas (9). Sea ΔI_0 un incremento autónomo inicial en la proporción de las inversiones. Esto induce a un incremento en el ingreso que lleva a un consumo inducido por la cantidad de $c'\Delta I_0$, donde c' es la propensión marginal a consumir. Pero a su vez, ΔI_0 , también genera una inversión inducida igual a $i'\Delta I_0$, donde i' es la propensión marginal a invertir. El resultado es un incremento inducido en el ingreso de $(c' + i')\Delta I_0$, el cual a su vez, genera otro incremento inducido igual a $(c' + i')(c' + i')\Delta I_0 = (c' + i')^2 \Delta I_0$, etc.

El incremento total en el ingreso nacional, es:

$$(1) \quad \Delta Y = [1 + (c' + i') + (c' + i')^2 + \dots] \Delta I_0$$

y el multiplicador de inversión compuesto, (10), es:

(9) En la expresión analítica de ambos multiplicadores se ha seguido la presentada por Oscar LANGE en su obra ya citada.

(10) Esta fórmula ha sido dada por Paul A. SAMUELSON, en "Fiscal Policy and Income Determination", en "Quarterly Journal of Economics", agosto 1942, pág. 578.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

$$(2) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta I_0} = \frac{1}{1 - (e' + i')}$$

siempre que $|e' + i'| < 1$, es condición de estabilidad del sistema.

Con el mismo procedimiento, obtenemos, el multiplicador compuesto de consumo. Sea ΔC_0 el incremento inicial autónomo en la proporción de consumo. Este genera un cambio inducido en la inversión, igual a $i'\Delta C_0$ y un cambio inducido en el consumo de $e'\Delta C_0$. Dichos cambios inducidos incrementan el ingreso nacional en $(e' + i')\Delta C_0$ y éste a su vez en $(e' + i')(e' + i')\Delta C_0 = (e' + i')^2 \Delta C_0$, etc.

Así tenemos:

$$(3) \quad \Delta Y = [1 + (e' + i') + (e' + i')^2 + \dots] \Delta C_0$$

y el multiplicador compuesto de consumo, es:

$$(4) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta C_0} = \frac{1}{1 - (e' + i')}$$

siempre que $(e' + i') < 1$, o sea $1 - (e' + i') > 0$.

En las fórmulas (2) y (4), ΔI_0 y ΔC_0 , son respectivamente los incrementos autónomos en la inversión y el consumo. Constituyen los multiplicandos de las fórmulas y no incluyen, como en los multiplicadores simples los cambios inducidos, sino que éstos están en el valor del multiplicador.

En consecuencia, el multiplicador sólo puede ser negativo si es compuesto y sólo así, podría justificarse el argumento del efecto negativo del gasto gubernamental sobre el ingreso nacional. Tal multiplicador, sería negativo, si la propensión marginal a invertir fuera negativa y sobrepasara la propensión marginal a consumir positiva. Pero tal situación sólo es dable en un sistema inestable, pues debe verificarse que $1 - (e' + i') < 0$ en tanto que la condición de estabilidad exige que $1 - (e' + i') > 0$.

Luego, el multiplicador sería negativo únicamente, en sistemas inestables y en tal caso infinito puesto que $|c' + i'| > 1$, lo que no cumple con la condición de convergencia, $|c' + i'| < 1$.

Observando, (2) y (4), vemos que ambos multiplicadores son iguales, lo que significa, que cualquier incremento en el gasto, ya sea de consumo o de inversión, dado en forma autónoma, tiene el mismo efecto sobre el ingreso nacional. De modo que, haciendo $c' + i' = E' = E'(Y)$ donde E' , es la propensión marginal a gastar, las ecuaciones (4) y (5) se transforman en:

$$(5) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta E_0} = \frac{1}{1 - E'}$$

conocido generalmente como "multiplicador del gasto total"⁽¹¹⁾, donde ΔE_0 es el incremento autónomo en la proporción del gasto y $1 - E'$ la renuencia marginal a gastar o propensión marginal a acumular, considerando la "acumulación" en el sentido de la diferencia entre el ingreso planeado y el gasto planeado. Siendo, $1 - c' = s$ es decir la propensión marginal a ahorrar, y $1 - E' = 1 - (c' + i')$ resulta, que $1 - E' = s - i'$, o sea que la renuencia marginal a gastar (propensión a acumular) es la diferencia entre la propensión marginal a ahorrar y la propensión marginal a invertir. El sistema es estable, siempre que $|1 - E'| > 0$, luego, la propensión marginal a acumular es una función creciente del ingreso nacional.

2. 2. *Análisis Dinámico de los Multiplicadores Compuestos.*

En los dos multiplicadores compuestos que hemos tratado consideramos como relaciones marginales, la propensión marginal a consumir y la propensión marginal a invertir.

(11) Este es el multiplicador acumulativo de Angell, quien ha dado también la fórmula, en su libro ya citado, pág. 196 y Oscar Lange, op. cit., pág. 232.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

Como un caso de multiplicador compuesto dinámico consideramos el esquema de Samuelson sobre la interrelación entre el multiplicador de inversión y el conocido principio de aceleración ⁽¹²⁾.

En este modelo las relaciones marginales son a) la propensión marginal a consumir y b) el coeficiente de aceleración también llamado "relación".

El principio de aceleración, en resumen, se reduce a afirmar que aún cambios pequeños en la demanda de productos acabados, pueden provocar variaciones mucho mayores en el monto de bienes y servicios requeridos para producirlos" ⁽¹³⁾. Es decir, que a variaciones en el consumo corresponden variaciones en la inversión proporcionalmente mayores. Analíticamente podemos expresarlo así:

$$I(t) = \beta [C(t) - C(t-1)]$$
$$(6) \quad \therefore \beta = \frac{I(t)}{C(t) - C(t-1)} = \frac{I(t)}{\Delta C(t-1)}$$

donde β es el acelerador o relación, $\Delta C(t-1)$ representa el incremento en la proporción de los gastos de consumo e $I(t)$ la inversión inducida. En realidad puede considerarse β como un "multiplicador simple de consumo-inversión", que conviene no confundirlo con el comunmente llamado multiplicador de consumo, pues este es el multiplicador de consumo-ingreso nacional.

Introducido ya el concepto del principio de aceleración se analiza el esquema enunciado.

En el mismo las adiciones al ingreso nacional están dadas simultáneamente por tres componentes, a saber: a) gastos pú-

(12) SAMUELSON, Paul: "Interrelaciones entre el Análisis del Multiplicador y el Principio de Aceleración"; en "Ensayos sobre el ciclo Económico dirigido por G. Haberler, editorial, Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1946, pág. 263.

(13) ZAMORA, F.: "Introducción a la Dinámica Económica", pág. 250, Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1958.

blicos, b) los gastos de consumo privado inducidos y c) inversiones privadas inducidas, que de acuerdo con el principio de aceleración se suponen proporcionales al incremento de consumo en el tiempo.

A fin de simplificar la notación hacemos $y(t) = \Delta Y(t)$; $c(t) = \Delta C(t)$; $i(t) = \Delta I(t)$.

Luego

$$(7) \quad y(t) = g(t) + c(t) + i(t)$$

Pero

$$(8) \quad c(t) = \alpha y(t-1)$$

donde α es la propensión marginal a consumir, que mide el efecto marginal de un cambio en el ingreso, en un momento cualquiera de tiempo, respecto al incremento de consumo una unidad de tiempo más tarde; o sea

$$(9) \quad \alpha = \frac{dC(t)}{dY(t-1)} = \frac{c(t)}{y(t-1)}$$

siendo,

(10) $i(t) = \beta [c(t) - c(t-1)] = \alpha \beta [y(t-1) - y(t-2)]$
y si hacemos $g(t) = 1$, podemos escribir el ingreso nacional, en la siguiente forma:

$$(11) \quad y(t) = 1 + \alpha (1 + \beta) y(t-1) - \alpha \beta y(t-2)$$

Esta ecuación entre diferencias finitas, expresa, el incremento marginal en cualquier momento de tiempo como un resultado aditivo de a) un incremento autónomo en los gastos en el tiempo t , $g(t)$; b) un incremento inducido en el ingreso, causado por incrementos en los ingresos $y(t-1)$ e $y(t-2)$.

Como es una ecuación entre diferencias finitas no homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes, para ha-

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

llar su solución general hacemos $\alpha(1 + \beta) = -A$ y $\alpha\beta = B$ y se tiene,

$$(12) \quad y(t) = 1 - Ay(t-1) - By(t-2)$$

admitimos como primera aproximación que la ecuación es de la forma,

$$(13) \quad y(t) = X(t) + Z(t)t \quad \text{donde}$$

$$(14) \quad X(t) = x^t = -Ax^{t-1} - Bx^{t-2}$$

y

$$(15) \quad Z(t) = Z$$

Dividiendo en (14) por x^{t-2} , resulta

$$(16) \quad \begin{cases} x^2 = -Ax - B & \therefore \\ x^2 + Ax + B = 0 \end{cases}$$

que es una ecuación de segundo orden cuyas raíces dependen de los coeficientes A y B (los cuales a su vez dependen de α y β). Hallando x_1 y x_2 , tenemos,

$$(17) \quad X(t) = a_1 x_1^t + a_2 x_2^t$$

solución general de la ecuación homogénea. Si damos a la ecuación (12) la forma (15), nos queda:

$$(18) \quad \begin{cases} Z(t) = Z = 1 - AZ - BZ \\ Z = \frac{1}{1 + A + B} \end{cases}$$

y substituyendo A y B por sus respectivos valores,

$$(19) \quad Z(t) = Z = \frac{1}{1 - \alpha}$$

que es una solución particular de la ecuación (15). Para hallar la solución general de (12) sustituimos $X(t) + Z(t)$ por sus valores, luego:

$$(20) \quad y(t) = \frac{1}{1-\alpha} + a_1 x_1^t + a_2 x_2^t$$

En el caso que $g(t)$ fuera distinto de uno y lo suponemos igual a L , la solución de la ecuación (12) es:

$$(21) \quad y(t) = \frac{L}{1-\alpha} + a_1 x_1^t + a_2 x_2^t$$

lo que nos permite encontrar el valor del ingreso nacional incrementado, en cualquier período de tiempo. Los coeficientes a_1 y a_2 son constantes que dependen del valor de la propensión a consumir y del coeficiente de aceleración.

2. 3. *Modelo de Hicks.*

Hicks al estudiar la interacción entre el multiplicador y el principio de aceleración, ha retomado el esquema de Samuelson, introduciéndole ciertas modificaciones.

Hicks define el principio de aceleración, "como el efecto sobre la inversión de las variaciones en el nivel de renta real o producción".

O sea que considera las variaciones en la "producción" o "renta real" y no solamente las variaciones en el consumo como es usual.

El análisis de Hicks es más completo que el de Samuelson, razón por la cual se lo agrega, ya que introduce ciertos aspectos que están estudiados más profundamente, y que hacen más clara la exposición sobre la interrelación del multiplicador y el principio de aceleración, especialmente en lo que atañe al comportamiento de la inversión inducida.

Ante todo debemos definir el concepto de inversión. Para Hicks, inversión es la creación neta de capital. El capital se divide en capital fijo, capital circulante y capital líquido (estos dos últimos constituyen el working capital). El "capital

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADÓR

fijo", comprende las máquinas, edificios, plantas, equipos, etc. y está sujeto a depreciación por el uso o el tiempo. El "capital circulante" incluye los bienes en proceso de elaboración, así como stocks mínimos de materiales y bienes semi-elaborados, que son necesarios, técnicamente, en el proceso de producción.

El "capital líquido", incluye los stocks de bienes acabados y sin acabar, que si bien no son necesarios técnicamente, lo son económicamente al permitir que la producción puede seguir "sin violencia".

Caracterizado así el concepto de inversión, veamos que ocurre ante una elevación de la demanda para la producción.

En una primera fase, hay una tendencia a la desinversión pues se utilizan los stocks del capital líquido y del circulante, hasta tanto el capital fijo se adapte al nuevo ritmo de producción.

La primera fase, pasa así a la segunda gradualmente y no en forma violenta.

Recién en la segunda fase tiene lugar la inversión inducida, la cual incluye:

- 1º) La inversión en stocks, para reponer la desaparición de los mismos en la primera fase.
- 2º) La inversión en capital fijo para ajustar el equipo a la capacidad máxima de producción.

Finalmente tenemos una tercera fase, ligada exclusivamente al problema de la depreciación del capital fijo.

Los efectos característicos de un descenso en la demanda para la producción tienen un comportamiento similar pero en sentido inverso.

En la primera fase, la disminución de la demanda conduce a una inversión positiva en stocks a través de los stocks sobrantes.

En la segunda fase tiene lugar la desinversión inducida por: 1º) reducción del capital fijo al no sustituirse y 2º) utilización gradual de los stocks sobrantes. La desinversión en esta fase, aunque sea igual al monto de inversión en el caso anterior, está más diseminada en el tiempo, por lo cual la tercera fase carece aquí de importancia.

Por lo tanto el proceso de propagación, en nuestro análisis, se ve retardado por un lado, por el período de ajuste entre el consumo y la renta (considerado como gasto) y por el otro, el tiempo que toma la producción de bienes de consumo, en ajustarse a la variación de la renta debido a características técnicas de la producción.

Para expresar analíticamente la relación entre el multiplicador y el principio de aceleración, Hicks, considera la inversión inducida como una "proporción constante de la variación de la renta".

Para que la inversión inducida pueda ser una "proporción constante" de la renta, se vale del modelo introducido por Harrods, de una economía "regularmente progresiva", donde la producción no es constante, como lo es en un estado estacionario, sino que la producción varía pero, a un ritmo constante. Por ello entonces, que existe una inversión inducida que tenderá a estar siempre en proporción constante con la producción o renta real.

Veamos ahora la expresión analítica del modelo de Hicks.

Con respecto a la función consumo, su referencia temporal se hace teniendo en cuenta no solamente un retardo uniforme de un período de tiempo sino que dependerá de la renta de varios períodos anteriores. O sea,

$$(22) \quad C(t) = c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + \dots + c_p Y_{t-p} + K = \sum_{r=1}^p c_r Y_{t-r} + K$$

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

La inversión inducida se supone linealmente dependiente de las variaciones de la renta:

$$(23) \quad I(t) = v_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + v_2 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \dots + \\ + v_p (Y_{t-p+1} - Y_{t-p}) = \sum_{r=1}^{p-1} v_r (Y_{t-r} - Y_{t-r-1})$$

La inversión autónoma es A_t . Luego la ecuación de equilibrio del ingreso en el período t será:

$$(24) \quad Y_t = C_t + I_t + A_t$$

o sea,

$$(25) \quad Y_t = A_t + \sum_{r=1}^p c_r Y_{t-r} + \sum_{r=1}^{p-1} v_r (Y_{t-r} - Y_{t-r-1}) + K$$

Para encontrar la solución general (25), establecemos primero, las desviaciones de la situación de equilibrio y obtenemos la siguiente ecuación homogénea entre diferencias finitas:

$$(26) \quad Y_t = \sum_{r=1}^p c_r Y_{t-r} + \sum_{r=1}^{p-1} v_r (Y_{t-r} - Y_{t-r-1})$$

cuya ecuación característica es:

$$(27) \quad f(u) = u^p - \sum_{r=1}^p c_r u^{p-r} - (u-1) \sum_{r=1}^{p-1} v_r u^{p-r-1} = 0$$

Si suponemos que todas las v_r son nulas excepto $v_1 = v$ todas las c_r también son nulas salvo $c_1 = c$; tenemos que la ecuación (25) es entonces de segundo orden y su ecuación característica es:

$$(28) \quad f(u) = u^2 - c u - (u-1) v = 0$$

Si hacemos $c = 1 - s$, para s positivo y muy pequeño, la ecuación queda:

$$(29) \quad f(u) = u^2 - (1 - s + v)u + v = 0$$

la que se resuelve siguiendo el mismo procedimiento al ya realizado en el modelo de Samuelson.

2. 4. *Multiplicador dinámico del gasto total* (*)

Para finalizar con los multiplicadores dentro de un sistema cerrado, nos falta analizar el "multiplicador dinámico del gasto total", cuya formulación estática ha sido realizada en 1.4.a.

Como vamos a calcular primero el multiplicador dinámico del gasto total para un número limitado de períodos y luego para un número infinito, conviene introducir el concepto de multiplicador truncado debido a Samuelson, quien lo enuncia por primera vez en su artículo "A Fundamental Multiplier Identity" publicado en *Econometría* en 1943.

Samuelson, llama multiplicador truncado, al que mide el incremento del nivel de ingreso nacional en un número determinado de períodos como resultado de un cambio en la proporción del gasto.

Como vemos, se diferencia del multiplicador total en que el efecto marginal de la variable independiente no se mide para un tiempo infinito, sino para un determinado número de períodos.

El concepto es sumamente valioso y constituye un paso más para ajustar la teoría a la realidad económica. En la práctica, difícilmente el multiplicador alcance el valor que le corresponde para infinitos períodos de tiempo. La formulación del multiplicador total es hipotética y general, en tanto que la del multiplicador truncado es una formulación particular de aquél y nos permite determinar el valor del multiplicador para

(*) En la siguiente expresión se trabaja con el modelo presentado por OSCAR LANGE en su artículo ya citado.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

cualquier número de períodos. El número de períodos que se tomarán en cuenta para medir el efecto multiplicador sobre el ingreso nacional será fijado por el economista de acuerdo al país en que se aplique y la realidad económica que el mismo viva. Así si se desea alcanzar un 80 % de la multiplicación total del ingreso variará el número de períodos a tomar según que el proceso se realice en una economía desarrollada, subdesarrollada o de transición y para cualquiera de ellas según la etapa del ciclo que está pasando.

A medida que un país avanza en su grado de desarrollo, menor es el tiempo necesario para el incremento señalado. Pero la experiencia enseña que por lo general en los países desarrollados el valor numérico del multiplicador es menor que el de los países menos desarrollados. Sobre el particular volveremos al final de este trabajo donde se calcula el valor del multiplicador del comercio exterior, para Argentina, Estados Unidos e Inglaterra en el período 1950-1959.

A continuación se analiza el multiplicador dinámico del gasto total. Para ello se parte del multiplicador dinámico compuesto que se consideró en el modelo de Hicks.

Recordemos que el modelo nos presentaba un multiplicador compuesto dinámico, en el cual jugaban como variables, la inversión autónoma y la inversión y el consumo inducidos. Teníamos entonces que la ecuación de equilibrio del ingreso nacional en el período t , (25) era:

$$Y_t = A_t + \sum_{r=1}^p c_r Y_{t-r} + \sum_{r=1}^{p-1} v_r (Y_{t-r} - Y_{t-r-1}) + K$$

Si consideramos una referencia temporal en el consumo de un retardo uniforme de una unidad de tiempo, como así también en la inversión inducida e incluimos la constante K en la inversión autónoma, la ecuación se reduce a lo siguiente;

$$(30) \quad Y_t = A_t + c_1 Y_{t-1} + v_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

Ahora bien, esta ecuación (30) puede ser transformada en otra ecuación entre diferencias finitas cuya solución especial nos da el "multiplicador dinámico truncao del gasto total". O sea que de un multiplicador compuesto pasamos a un multiplicador simple en "su forma" en el sentido que consideramos una sola relación marginal pero que involucra "dos".

Efectivamente, la inversión y el consumo inducidos se pueden considerar como el "gasto total inducido". La ecuación (30) se transforma entonces en:

$$(31) \quad Y_t = \alpha Y_{t-1} + E_t$$

Donde α es ahora la "propensión marginal a gastar"

igual a $\frac{d E_t}{d Y_{t-1}}$ y E_t es el gasto autónomo [en lugar de A_t de (30)].

Coloquemos la desviación de la ecuación (11) de su posición de equilibrio y hagamos $\Delta E_t = e_t$, $\Delta Y_t = y_t$, a fin de abreviar la notación. Luego, resulta:

$$(32) \quad y_t = \alpha y_{t-1} + e_t$$

lo que significa que el incremento marginal del ingreso en cualquier momento de tiempo es igual al gasto inducido del incremento del ingreso del período precedente más el incremento simultáneo del gasto autónomo. Para hallar la solución especial de (32), resolvemos primero la ecuación homogénea:

$$(33) \quad y_t = \alpha y_{t-1}$$

siendo la condición inicial $y_s = e_s$. Luego,

$$(34) \quad y_t = \alpha^{t-s} y_s = \alpha^{t-s} e_s \quad (t \text{ y } s, \text{ enteros})$$

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

La ecuación (34) nos da el incremento del ingreso en el momento t , ($t \geq s$) como resultado de un aumento inicial único en los gastos igual a e_s . Ahora, si en lugar de un solo aumento e_s en el momento s , tenemos aumentos en los momentos $0, 1, \dots, n$; o sea e_0, e_1, \dots, e_n , respectivamente, para $n = t$, la ecuación (34) será

$$(35) \quad y_n = \alpha^n e_0 + \alpha^{n-1} e_1 + \dots + \alpha^{n-1} + e_n = \sum_{s=0}^n \alpha^{n-s} e_s$$

que es la solución deseada de (32) o sea, el "multiplicador dinámico truncado del gasto total" y donde los incrementos del gasto autónomo varían de período en período. Supuesto que el gasto inicial autónomo e_0 es el mismo en todos los períodos sucesivos, la ecuación (35) es igual a:

$$(36) \quad y_n = (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n) e_0 = e_0 \sum_{t=0}^n \alpha^t = e_0 \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Haciendo $e_0 = 1$, tenemos que y_n es el multiplicador dinámico truncado del gasto total. Si en la ecuación (35), tomamos límite para n que tiende a ∞ , obtenemos el "multiplicador dinámico del gasto total". O sea, para $e \geq e_s$; $s = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$(37) \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^n \alpha^{n-s} e_s \leq e \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^n \alpha^{n-s} = e \frac{1}{1 - \alpha}$$

En la ecuación (36) obtenemos también el multiplicador dinámico del gasto total, siempre que hagamos variar t , de 0 a ∞ . O sea

$$(38) \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e_0 \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t = e_0 \frac{1}{1 - \alpha} \quad \therefore$$

$$\frac{y}{e_0} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t = \frac{1}{1 - \alpha}$$

En la ecuación (37) tenemos el multiplicador dinámico del gasto total, que mide el efecto marginal que sobre el ingreso

nacional produce un conjunto de incrementos autónomos del gasto, distintos entre ellos.

En la ecuación (38), el multiplicador dinámico del gasto total mide el efecto marginal que sobre el ingreso nacional produce un aumento inicial autónomo que permanece constante en los distintos períodos de tiempo.

Suponemos ahora, que la proporción de gastos responde a cambios en el ingreso distribuidos con una demora de 1, 2, ... k, unidades de tiempo. Entonces, las respectivas propensiones marginales a gastar serán $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Luego, lo que incrementa el ingreso en el momento t, está formado por los gastos inducidos de los incrementos de ingreso en los períodos $t-1, t-2, \dots, t-k$, y por un incremento autónomo en la proporción de gastos en el momento t.

Esto podemos expresarlo bajo la forma de una ecuación entre diferencias finitas no homogénea. O sea,

$$(39) \quad y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_k y_{t-k} + e_t$$

La ecuación característica de (39) considerada, primeramente como homogénea es:

$$(40) \quad x^t - \alpha_1 x^{t-1} - \alpha_2 x^{t-2} - \dots - \alpha_k x^{t-k} = 0$$

dividiendo ambos miembros por x^{t-k} , resulta:

$$(41) \quad x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \alpha_2 x^{k-2} - \dots - \alpha_k = 0$$

Sean, x_1, x_2, \dots, x_n , las distintas raíces n de (41) ($n \leq k$) con multiplicidades r_1, r_2, \dots, r_n , respectivamente, de modo que $r_1 + r_2 + \dots + r_n = k$.

Las soluciones particulares de las ecuaciones reducidas, son entonces de la forma,

$$(42) \quad x_i^t, t x_i^t, \dots, t^{r_i-1} x_i^t \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

y la solución general de la ecuación reducida es,

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

$$(43) \quad \sum_{i=1}^n q_i(t) x_i^t \quad (t, \text{ entero y positivo})$$

siendo $q_i(t)$ un polinomio entero en t , de grado $r_i - 1$, o sea

$$(44) \quad q_i(t) := a_0 t^{r_i-1} + a_1 t^{r_i-2} + \dots + a_{r_i-2} t + a_{r_i-1}$$

Siendo las condiciones iniciales $y_s := e_s$; $y_{s-1} = y_{s-2} = \dots = y_{s-k-1} = 0$; las k ecuaciones, luego de hacer un cambio de origen y en lugar de t considerar $t - s$, son:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n q_i(0) = e_s \\ \sum_{i=1}^n q_i(t-s) x_i^{t-s} = 0 \quad (t = s-1, s-2, \dots, s-k+1) \end{array} \right.$$

las que son lineales en los coeficientes de los polinomios y nos permiten determinar estos coeficientes. Los valores de (45) pueden ser expresados como productos de e_s , luego la solución especial de la ecuación reducida de acuerdo a las condiciones iniciales es:

$$(46) \quad y_s(t) := \sum_{i=1}^n \bar{q}_i(t-s) x_i^{t-s} e_s \quad (t \text{ y } s \text{ enteros})$$

Lo cual indica lo que incrementa el ingreso nacional en el momento t , ($t \geq s$) ante un incremento *único* en los gastos en el momento s .

Si en lugar de un incremento único, tenemos un conjunto de incrementos e_0, e_1, \dots, e_r , que se realizan en los momentos $0, 1, \dots, r$, la ecuación (46) para $t = r$, siendo $r \geq k$, es:

$$(47) \quad y_r = \sum_{s=0}^r \sum_{i=1}^n \bar{q}_i(r-s) x_i^{r-s} e_s$$

Si todos los incrementos autónomos son iguales entre sí, o sea $e_0 = e_1 = \dots = e_r$, la ecuación (47) queda

$$(48) \quad y_r = e_0 \sum_{t=0}^r \sum_{i=1}^n \bar{q}_i(t) x_i^t$$

Para $e_0 = 1$, y_r es el multiplicador dinámico truncado, o sea:

$$(49) \quad Y_r = \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^r \bar{q}_i(t) x_i^t$$

y el valor del multiplicador dinámico del gasto total, es:

$$(50) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta E_0} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^{\infty} \bar{q}_i(t) x_i^t$$

La suma interior de (50) es una serie potencial, convergente únicamente para $|x_i| < 1$. En los polinomios $q_i(t)$, que son los coeficientes de las series potenciales, tenemos por aplicación repetida de la regla de L'Hopital, que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{q_i(t)}{q_i(t+1)} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

EL MULTIPLICADOR EN UNA ECONOMIA ABIERTA

3. 1. *Introducción*

La segunda parte de este trabajo trata del estudio de las fluctuaciones del ingreso nacional en una economía abierta.

Es de conocimiento general, que los países, si bien tienen límites políticos, no tienen límites económicos, pues resulta imposible, contemporáneamente, creer en la existencia de una nación que se auto-abastece. Todas en menor o mayor grado, recurren al comercio con otros países, es decir, a un comercio internacional.

Por consiguiente, la determinación del ingreso nacional y sus fluctuaciones, no solo dependen de variaciones en el consumo y/o en la inversión, como hemos visto hasta ahora, sino que también dependen de las variaciones en el saldo de la Balanza de Pagos.

Para poder medir las variaciones del ingreso nacional en una economía abierta, nos valemós nuevamente del multiplicador, pero por cierto, que no será el mismo que hemos utilizado anteriormente, aunque los elementos ya enunciados de la teoría nos seguirán siendo útiles en algunos aspectos. En la definición de nuevos conceptos sigo a Fritz Machlup⁽¹⁴⁾.

Conviene distinguir los conceptos de "inducido" y "autónomo" aplicados a la exportación y a la importación llevada a cabo entre dos países llamados A y B. La "exportación inducida del exterior" es siempre función del ingreso nacional del

(14) MACHLUP, Fritz, *International Trade and the National Income Multiplier*. The Blakiston Company, Filadelfia, 1942.

país extranjero y se mide con la propensión marginal a importar de este último.

Llamando $X_{i,A}$ la exportación inducida del exterior para el país A y m_B la propensión marginal a importar del país B, definida como la parte que de un incremento infinitesimal del

ingreso nacional se gasta en importaciones, o sea $m_B = \frac{d M_B}{d Y_B}$,

tenemos,

$$(1) \quad X_{i,A} = m_B Y_B = \frac{d M_B}{d Y_B} Y_B$$

Del mismo modo para el país B, las exportaciones inducidas del exterior son,

$$(2) \quad X_{i,B} = m_A Y_A = \frac{d M_A}{d Y_A} Y_A$$

Las "importaciones inducidas", tanto en el país A como en B, son funciones del ingreso nacional de los mismos, y están medidas por sus respectivas propensiones marginales a importar. O sea.

$$(3) \quad \begin{aligned} M_{i,A} &= m_A Y_A \\ M_{i,B} &= m_B Y_B \end{aligned}$$

Se entiende por "exportación autónoma" a aquélla que es independiente de las variaciones en el ingreso nacional del país extranjero. Es función de variables exógenas al sistema económico mismo, por ej. una exportación debida a un cambio en las tarifas o aranceles, o en la moda o gustos del país extranjero. La simbolizamos por X .

Las "importaciones autónomas" al igual que las exportaciones autónomas, son independientes del ingreso nacional. Resulta evidente: a) que al suponer solamente la existencia de

dos países (país A y el resto del mundo como país B) la exportación autónoma de uno de ellos es igual a la importación autónoma del otro; b) que una disminución en las exportaciones de A inducidas del exterior (país B) es igual a la disminución de las importaciones de B, inducidas (de su mismo ingreso disminuído) y c) un aumento en las importaciones inducidas de A, es igual a un aumento en las exportaciones inducidas del exterior para el país B (inducidas del ingreso incrementado de A).

Resulta conveniente recordar que en todo momento al hablar de "exportaciones inducidas del exterior" se quiere significar que son funciones de los cambios en el ingreso del país extranjero, en tanto que al hablar de "importaciones inducidas", éstas son funciones de los cambios en el ingreso nacional.

Finalmente, para completar el conjunto de nuevos elementos que utilizaremos, introducimos el concepto de "factor de repercusión del exterior" que puede explicarse como sigue: Una exportación autónoma en el país A incrementará su ingreso y sus importaciones inducidas pero también disminuirá el ingreso del país B en la medida de la importación autónoma. La disminución del ingreso de B disminuye sus importaciones inducidas que constituyen exportaciones inducidas del exterior para A y ésta, disminución en las exportaciones inducidas del exterior, para el país A, es lo que se debe tener en cuenta. El llamado factor de repercusión del exterior, está medido por la propensión marginal a importar del país extranjero o "propensión a volver a gastar" de los otros sistemas. Machlup, lo simboliza con la letra f y hace $f_A = m_B$ y $f_B = m_A$. Lange, en su trabajo ya citado lo simboliza con la letra R y hace $R = R(E_2)$ o sea una función de los gastos externos, ya que E_2 representa los gastos en el exterior.

3. 2. *El Multiplicador de Exportación entre dos países.*

Al analizar y determinar el multiplicador de exportación entre dos países, A y B vamos a considerar dos situaciones: a) cuando el incremento en las exportaciones es autónomo y b) cuando el incremento en las exportaciones es inducido.

En este modelo, como en los siguientes suponemos: 1) que las supuestas propensiones a importar y a ahorrar, permanecen estables durante los períodos en que son considerados, 2) que los precios (incluyendo los términos de intercambio y las tasas de interés también son estables; y 3) que la inversión interna es un parámetro.

3. 2 a) *Para un incremento neto de exportaciones autónomos.*

Supongamos que el país A tiene una exportación autónoma X de un producto que no requiere la introducción de materias primas extranjeras para su producción. Esta condición la incluimos para poder aislar más el efecto de la exportación autónoma sobre el ingreso nacional de A y también de B.

La exportación X incrementa el ingreso en A y esto induce a la población a comprar más bienes y servicios de producción nacional y del extranjero cuya cantidad estará medida por la propensión marginal a consumir bienes nacionales c_A , y la propensión marginal a importar m_A . También se ahorrará una parte del incremento y el monto total del ahorro estará medido por la propensión marginal a ahorrar s_A . De modo que hasta ahora, tenemos dos filtraciones muy importantes en el incremento del ingreso, que son: el ahorro y las importaciones. Pero aún no hemos analizado la situación en que queda el país B, ni ha entrado a jugar el factor de repercusión del extranjero.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

El incremento en el ingreso de A, significa una disminución en el ingreso de B, ya que, las "exportaciones" autónomas de A son "importaciones" autónomas para B. La disminución del ingreso de B, disminuye sus importaciones inducidas del exterior. En consecuencia A tiene otra filtración en el incremento de su ingreso, que es la exportación inducida del exterior la cual ha disminuído a causa de la disminución del ingreso de B. Analíticamente, podemos expresar lo que incrementa el ingreso en el país A, (omitimos el signo Δ), así:

$$(4) \quad Y_{A,\infty} = X + c_A Y_{A,\infty} + m_B Y_{B,\infty}$$

Donde X representa la exportación autónoma, $c_A Y_{A,\infty}$ representa el consumo interno y $m_B Y_{B,\infty}$ las exportaciones inducidas del exterior. De estos tres términos los dos primeros son positivos y el último negativo, ya que $Y_{B,\infty}$ es negativo. Recordemos que $Y_{A,\infty}$ e $Y_{B,\infty}$ representan el incremento del ingreso en el país A y B respectivamente.

Ahora bien, como los saldos de la balanza de pagos, en el caso de solamente dos países deben ser iguales pero de signos opuestos, y supuesta la inversión interna constante, las sumas ahorradas y desahorradas respectivamente en los dos países, deben ser iguales ya que, después de un número infinito de períodos se igualan con los saldos de las balanzas de pagos. Simbólicamente:

$$(5) \quad s_A Y_{A,\infty} = -s_B Y_{B,\infty}$$

Con estas dos ecuaciones podemos determinar el "multiplicador de una exportación autónoma entre dos países".

Transformamos (5) en,

$$(5.a) \quad Y_{B,\infty} = -\frac{s_B}{s_A} Y_{A,\infty}$$

Sustituyendo (5.a) en (4) tenemos:

$$(6) \quad Y_{A,\infty} = X + c_A Y_{A,\infty} - m_B \frac{S_A}{S_B} Y_{A,\infty}$$

despejando $Y_{A,\infty}$, queda

$$(6.a) \quad Y_{A,\infty} = X \frac{1}{1 - c_A + m_B \frac{S_A}{S_B}}$$

pero $1 - c_A = s_A + m_A$, luego

$$(6.b) \quad Y_{A,\infty} = X \frac{1}{s_A + m_A + m_B \frac{S_A}{S_B}}$$

Esta fórmula nos da el incremento marginal del ingreso como un múltiplo de la exportación autónoma.

Para calcular el multiplicador, simplemente hacemos,

$$(6.c) \quad k_A = \frac{Y_{A,\infty}}{X} = \frac{1}{s_A + m_A + m_B \frac{S_A}{S_B}}$$

Para el país B, es,

$$(6.d) \quad -Y_{B,\infty} = -X \frac{1}{s_B + m_B + m_A \frac{S_B}{S_A}}$$

$$(6.e) \quad k_B = \frac{1}{s_B + m_B + m_A \frac{S_B}{S_A}}$$

Cada multiplicador contiene como parámetros las cuatro propensiones marginales, m_A , m_B , s_A y s_B . Se diferencia de los

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

multiplicadores comunes en que contiene el término de las repercusiones mutuas. El llamado factor de repercusión del exterior, que simbolizamos con f y lo hicimos igual a la propensión marginal a importar del país extranjero, es decir $f_A = m_B$;

$f_B = m_A$; es ahora diferente: $f_A = m_B \frac{s_A}{s_B}$; $f_B = m_A \frac{s_B}{s_A}$, o

sea es igual a la propensión marginal a importar del país extranjero por la razón de las propensiones marginales a ahorrar. La diferencia estriba en que hemos hecho intervenir el ahorro inducido.

Solamente en un modelo en el cual consideramos como filtración las importaciones y el factor de repercusión del exterior y suponemos el ahorro inducido nulo, f es igual a la propensión marginal a importar del país extranjero.

A continuación hacemos ciertas observaciones sobre las fórmulas y su comportamiento. Al hablar de "nuestro país" debemos entender que es A. Ante todo diremos que el ingreso se incrementa en A, en la medida en que la exportación autónoma excede las importaciones inducidas, el ahorro inducido y la disminución en las exportaciones inducidas del exterior.

El ingreso en B disminuye siempre que la importación autónoma supere la disminución en el ahorro inducido y en las importaciones inducidas y el incremento en las exportaciones inducidas del exterior.

Cuanto mayor sea la propensión marginal a ahorrar del país extranjero, mayor será el multiplicador para nuestro país, supuestas constantes las otras propensiones.

Con respecto a las otras dos propensiones a ahorrar y a importar s_A y m_A , respectivamente, cuanto más pequeñas sean mayor será k_A . Observamos también que el multiplicador de un país no se ve afectado por un cambio en las propensiones marginales a ahorrar e importar del otro país, siempre que éstas cambien proporcionalmente, ya que m_B figura en el numerador y s_B en el denominador.

El multiplicador es igual a la unidad, cuando el denominador $s_A + m_A + m_B \frac{s_A}{s_B} = 1$ y es menor que uno, si $s_A + m_A + m_B \frac{s_A}{s_B} > 1$.

Para que esto ocurra es necesario, en el primer caso que $m_B \frac{s_A}{s_B}$ sea igual a c_A , ya que $s_A + m_A = 1 - c_A$, luego

$$s_A + m_A + c_A = 1, \text{ de donde } m_B \frac{s_A}{s_B} = c_A.$$

En el segundo caso es $m_B \frac{s_A}{s_B} > c_A$. Esta desigualdad

podemos escribirla de otra manera. Hacemos $\frac{s_A}{s_B} > \frac{c_A}{m_B}$ o

sea que el multiplicador de exportación en un país será menor que uno cuando la razón entre las propensiones marginales a ahorrar del país y del extranjero sea mayor que la razón entre la propensión marginal a consumir del país y la propensión marginal a importar del extranjero.

Ya hemos visto que, en tanto la exportación autónoma no sea alcanzada por el incremento del ahorro inducido, más el incremento de la importación inducida y la disminución de la exportación inducida del exterior, el ingreso nacional seguirá creciendo. Ahora bien, cabe preguntarse en qué condiciones todos los items inducidos igualan o superan la exportación autónoma.

Si las tres propensiones no suman más de uno y operan solamente sobre el ingreso del país, nunca alcanzarán la exportación autónoma. Pero lo cierto es que una de las propensiones se origina en la exportación inducida del exterior y se

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

calcula en base al ingreso del otro país, de modo tal que si el multiplicador del país extranjero es mayor que el nacional esta propensión actuará con mayor poder.

Con un multiplicador mayor, la disminución del ingreso en el país extranjero será mayor que el incremento del ingreso nacional. En consecuencia la disminución de las exportaciones inducidas para nuestro país se convertirán, tarde o temprano, en una pesada carga, junto con la importación y el ahorro inducido, como para que la exportación autónoma pueda sobrepasarla. De allí, entonces, que el ingreso nacional, luego de haber alcanzado su máximo, desciende a un nivel inferior.

Para que el multiplicador del país extranjero sea mayor que el nuestro, es necesario que la propensión a ahorrar en el extranjero sea menor que la de nuestro país.

Si el país importador tiene una alta propensión a ahorrar y en consecuencia, un bajo multiplicador, la disminución en el ingreso llegará pronto a su punto más bajo para luego recuperarse y alcanzar un nivel de equilibrio más alto.

Volviendo nuevamente a nuestra fórmula del multiplicador de exportación entre dos países (cuando la exportación es autónoma) vamos a hacer una comparación de ésta con la obtenida por Chipman⁽¹⁵⁾ quien utiliza la nomenclatura debida a Oscar Lange en su artículo ya citado y sigue un procedimiento similar al de Machlup para la obtención de la fórmula.

La fórmula de Machlup o sea la que hemos seguido en esta exposición es:

$$(7) \quad k_A = \frac{Y_{A,\infty}}{X_A} = \frac{1}{s_A + m_A + m_B \frac{s_A}{s_B}}$$

(15) CHIPMAN, John S. "The Generalized Bi-System Multiplier". Canadian Journal of Economics and Political Science, mayo 1949, pp. 182-83 y 186-87.

MARSH, Bailey Donald, "Comercio Mundial e Inversión Internacional", 1951, pág. 341 y sgtes.

La fórmula a que llega Chipman es,

$$(8) \quad \frac{dY_A}{dE_{2A}} = \frac{1}{1 - E'_A + E'_{2A} + E'_{2B} + E'_{2B} \frac{1 - E'_A}{1 - E'_B}}$$

Ahora bien,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_A = dE_{2A} & \text{(gasto externo según Chipman)} \\ S_A = 1 - E'_A & \text{(exceso de ahorro para Chipman o (16))} \\ m_A = E'_{2A} & \text{(propensión marginal a importar de A)} \\ \begin{array}{l} S_A \\ m_B \end{array} = \frac{1 - E'_A}{1 - E'_B} & \begin{array}{l} \text{(propensión marginal a importar en B, por} \\ \text{el exceso de ahorro de A sobre el exceso} \\ \text{de ahorro de B según Chipman).} \end{array} \end{array} \right.$$

Como puede observarse, resulta fácil transformar (7) en (8) y viceversa.

Para llegar a su fórmula, Chipman parte de las siguientes ecuaciones:

$$(10) \quad dY_A = dE_{2A} + E'_A Y_A - E'_{2A} Y_A + E'_{2B} Y_B$$

o sea, el incremento marginal del ingreso en A es igual al incremento del gasto autónomo del exterior, más su gasto interno inducido, menos su gasto externo inducido, más el gasto externo inducido del país B. Y

$$(11) \quad (1 - E'_A) dY_A = (1 - E'_B) dY_B$$

Es decir, el exceso de ahorro en A es igual al exceso de desahorro en B. En equilibrio el exceso de ahorro en A solo puede ir a la balanza exterior (préstamos a B) y por ello, será

(16) Chipman hace $1 - E' = s' - I'$, o sea ahorro o desahorro en relación con la inversión o desinversión. Como nosotros hemos supuesto, siguiendo a Machlup, la inversión neta constante, hablamos del ahorro (s' o $1 - E'$) en lugar de exceso de ahorro.

exáctamente igual al exceso de desahorro en B (préstamos pedidos a A). De la ecuación (11) despejamos $d Y_B$ y tenemos.

$$(12) \quad d Y_B = \frac{1 - E'_A}{1 - E'_B} d Y_A$$

Sustituyendo (12) en (10) y mediante transformaciones convenientes se llega a la fórmula (8) deseada.

A continuación analizamos la situación.

3. 2 b) *Cuando es un incremento neto de exportaciones inducidas.*

Si en lugar de suponer que la exportación en el país A es autónoma, o sea debida a causas tales como, cambio en el gusto de los consumidores, cambios en las tarifas aduaneras, etc. suponemos que la exportación es "inducida", es decir se debe a un incremento en el ingreso de B, el multiplicador de exportación es distinto al ya visto.

Una exportación autónoma en A disminuye el ingreso en B y las importaciones inducidas de B con respecto a A también disminuyen, en cambio una exportación en A, debida a ingresos incrementados en B, puede a lo sumo detener el crecimiento del ingreso en B pero nunca reducirlo.

El multiplicador de las exportaciones inducidas asegura el incremento del ingreso a causa de una elevación del ingreso del exterior. Para estudiar el efecto que sobre el país A tiene una exportación inducida, debemos primero estudiar las causas que determinan el aumento de importaciones inducidas en B.

El proceso se inicia con un incremento autónomo en las inversiones, en el país B, lo que da lugar a una elevación del ingreso. Ahora bien, con una propensión a importar mayor que cero, parte del ingreso incrementado se gastará en el exterior, dando lugar a las exportaciones inducidas para el país

A. Cuando el ingreso de A se ve incrementado, parte del mismo se gastará en importación de productos de B lo que generará mayor ingreso en B.

Así, mientras el ahorro inducido y las importaciones inducidas retardan el incremento del ingreso en B, las exportaciones inducidas del exterior lo vigorizan. Antes de determinar la fórmula del "multiplicador de exportaciones inducidas", entre dos países, haremos notar que en esta fórmula no entra el factor de repercusión del extranjero. La razón es sencilla, cuando consideramos el multiplicador de la exportación autónoma, las exportaciones inducidas, formaban parte del mismo como factor de repercusión del exterior, pero cuando es el multiplicador de exportaciones inducidas, estas constituyen el "multiplicando".

Cuando en el país A, el ahorro inducido iguala al *exceso* de exportación inducida del exterior, el ingreso deja de crecer, o sea, alcanza su nivel de equilibrio.

Expresándolo en símbolos (omitimos el signo Δ), nos queda:

$$(13) \quad s_A Y_A = m_B Y_B - m_A Y_A$$

de donde,

$$(13.a) \quad Y_A = m_B Y_B \frac{1}{s_A + m_A}$$

donde $m_B Y_B$ representa la exportación inducida del exterior y actúa como multiplicando. El multiplicador es muy sencillo ya que sólo considera como filtraciones el ahorro y la importación inducidos. O sea,

$$(14) \quad k_A = \frac{Y_A}{m_B Y_B} = \frac{1}{s_A + m_A}$$

En el caso del país B, la fórmula del multiplicador no es la misma, pues aquí, no se trata de una exportación indu-

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

cida del exterior sino del "multiplicador de una inversión interna autónoma, en un sistema abierto".

El ingreso en B, alcanza el equilibrio cuando,

$$(15) \quad Y_B = I_B + c_B Y_B + m_A Y_A$$

Luego, el incremento del ingreso en B, está dado por la inversión interna autónoma I_B , más el consumo inducido $c_B Y_B$ más las exportaciones inducidas del exterior, $m_A Y_A$.

Sustituyendo (13.a) en (15) y luego de algunas transformaciones, nos queda:

$$(15.a) \quad Y_B = I_B \frac{s_A + m_A}{(s_A + m_A)(s_B + m_B) - m_A m_B}$$

de donde

$$(15.b) \quad k_B = \frac{Y_B}{I_B} = \frac{s_A + m_A}{(s_A + m_A)(s_B + m_B) - m_A m_B}$$

Esta fórmula puede escribirse, también, en las siguientes formas:

$$(15.c) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_B = \frac{s_A + m_A}{s_A s_B + s_A m_B + s_B m_A} \quad 0 \\ k_B = \frac{1 + \frac{m_A}{s_A}}{s_B + m_B + s_B \frac{m_A}{s_A}} \quad 0 \\ k_B = \frac{1 + \frac{m_A}{s_A}}{m_B + s_B \left(1 + \frac{m_A}{s_A} \right)} \end{array} \right.$$

Esta fórmula del "multiplicador de inversión en un sistema abierto" se diferencia de la fórmula del multiplicador de inversión simple o sea $\frac{1}{1 - c'}$, en que en el numerador

tenemos además $\frac{m_A}{s_A}$ y en el denominador $s_B \frac{m_A}{s_A}$. El primero representa las importaciones inducidas del país A como consecuencia del incremento del ingreso nacional, lo que hace entonces que aumente el multiplicador de B y el segundo $s_B \frac{m_A}{s_A}$ representa lo que se ahorra en el país B de esa exportación inducida hacia A (volvemos a recordar que lo que es importación inducida para A, es exportación inducida para B). Por consiguiente $s_B \frac{m_A}{s_A}$, disminuye el incremento del ingreso en B (que fue originado por una inversión autónoma) y se considera como una "repercusión de una repercusión".

Si en lugar de considerar el "factor de repercusión del exterior" o sea las exportaciones inducidas del exterior, como función de los cambios del ingreso del exterior, o sea $X_{i,B} = m_A Y_A$ lo hacemos depender de los gastos en el exterior, o sea $X_{i,B} = m_A m_B$ la fórmula (38.c) resulta distinta.

El procedimiento utilizado en (38.c) para su determinación no es útil ahora, ya que el nuevo multiplicador está desvinculado de los cambios de ingreso en A. Para su determinación seguimos el procedimiento utilizado por Lange en su obra ya citada, que no es más que el de las series geométricas convergentes.

De la inversión autónoma I_B , se gasta en consumo de bienes nacionales $c_B I_B$ y en importaciones $m_B I_B$. Pero de este gasto en el exterior, vuelve al país $m_A m_B I_B$, contribuyendo a incre-

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

mentar el ingreso. De modo que el incremento inicial I_B , conduce a un mayor aumento igual a $(c_B + m_A m_B) I_B$ pero a su vez, este aumento conduce a otro aumento, igual a $(c_B + m_A m_B) (c_B + m_A m_B) I_B = (c_B + m_A m_B)^2 I_B$ y así sucesivamente.

Luego el incremento total del ingreso en el país B, es:

$$(16) \quad Y_B = [1 + (c_B + m_A m_B) + (c_B + m_A m_B)^2 + \dots] I_B$$

y el multiplicador de inversión en un sistema abierto, es

$$(17) \quad k_B = \frac{1}{1 - (c_B + m_A m_B)} = \frac{1}{s_B + m_B - m_A m_B} = \frac{1}{s_B + m_B(1 - m_A)}$$

La fórmula (17) puede fácilmente transformarse en la fórmula debida a Lange, sobre el "multiplicador del gasto interno, en un sistema abierto".

Lange llama E , E_1 y E_2 a la proporción de gastos totales, gastos internos y gastos externos respectivamente, siendo $E = E_1 + E_2$. Por hipótesis $E_1 = E_1(Y)$ y $E_2 = E_2(Y)$. Llama R al factor de repercusión y es función de los gastos externos o sea $R = R(E_2)$. Luego la fórmula (17) se convierte en:

$$(17.a) \quad k_B = \frac{dY}{dE_1} = \frac{1}{1 - (E' + R')} = \frac{1}{1 - [E' - (1 - R')E'_2]}$$

Las relaciones son:

$$(18) \left\{ \begin{array}{ll} s_B = 1 - E' & \text{(exceso de ahorro para Lange)} \\ m_B = E'_2 & \text{(propensión marginal a importar o a gastar externamente según Lange)} \\ m_A = R' & \text{(propensión a volver a gastar del país A según Lange).} \\ I_A = dE_1 & \text{(incremento de un gasto interno según Lange).} \end{array} \right.$$

De la fórmula (17) o (17.a) se deduce que el multiplicador es menor cuanto mayor sea la propensión marginal a importar m_B y cuanto mayor sea la renuencia marginal a gastar o sea $(1 - R')$ o $(1 - m_A)$.

3. 3. *El multiplicador en una economía abierta y los cambios en las propensiones marginales a consumir e importar.*

Veamos ahora qué ocurre si en lugar de considerar un cambio en las exportaciones se produce un cambio en las propensiones marginales a consumir e importar (17).

Las variables del modelo son las mismas que las de los modelos anteriores, a saber:

C = Función consumo de bienes nacionales

I = Función inversión

M = Función importación

X = Función exportación

Y = Renta nacional.

Las relaciones funcionales de las variables para el país A y B son:

1) El consumo es función del ingreso y viene medido por la propensión marginal a consumir de cada país, o sea,

$$(19) \quad C_A = c_A Y_A \quad C_B = c_B Y_B$$

2) La inversión es un parámetro. O sea,

$$(20) \quad I_A = \text{parámetro} \quad I_B = \text{parámetro}$$

3) La importación es función del ingreso y es medida por la propensión marginal a importar para cada país. O sea,

$$(21) \quad M_A = m_A Y_A \quad M_B = m_B Y_B$$

(17) Para un análisis más extenso véase: BREMS, Hans, "Output, Employment Capital and Growth", ed. Harper and Brothers, N. York, 1959.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

4) La exportación en cada país es igual a la importación del otro. O sea,

$$(22) \quad X_A = M_B \qquad X_B = M_A$$

5) En equilibrio la renta nacional es igual a la demanda total o sea,

$$(23) \quad Y_A = C_A + I_A + X_A \qquad Y_B = C_B + I_B + X_B$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones respecto al ingreso del país A, tenemos:

$$(24) \quad Y_A = \frac{(1 - c_A) I_A + m_B I_B}{(1 - c_A)(1 - c_B) - m_A m_B}$$

Derivando parcialmente con respecto a las propensiones marginales a consumir e importar de ambos países, tenemos los siguientes multiplicadores:

$$(25) \quad \frac{\partial Y_A}{\partial c_A} = \frac{(1 - c_B) Y_A}{(1 - c_A)(1 - c_B) - m_A m_B}$$

$$(26) \quad \frac{\partial Y_A}{\partial I_A} = \frac{1 - c_B}{(1 - c_A)(1 - c_B) - m_A m_B}$$

$$(27) \quad \frac{\partial Y_A}{\partial m_A} = \frac{m_B Y_A}{(1 - c_A)(1 - c_B) - m_A m_B}$$

$$(28) \quad \frac{\partial Y_A}{\partial c_B} = \frac{m_B Y_B}{(1 - c_A)(1 - c_B) - m_A m_B}$$

$$(29) \quad \frac{\partial Y_A}{\partial I_B} = \frac{m_B}{(1 - c_A)(1 - c_B) - m_A m_B}$$

$$(30) \quad \frac{\partial Y_A}{\partial m_B} = \frac{(1 - c_B) Y_B}{(1 - c_A)(1 - c_B) - m_A m_B}$$

Es decir que un aumento en el ingreso nacional puede ser provocado si: a) aumenta la propensión marginal a consumir productos nacionales del país de origen; b) aumenta la propensión marginal a consumir productos nacionales en B; c) aumenta la propensión marginal a importar en A, y d) aumenta la propensión marginal a importar en B.

Estos multiplicadores son también números concretos y vienen medidos por la unidad de medida en que se expresa la renta nacional.

**EL MULTIPLICADOR DE EXPORTACION
ENTRE MAS DE DOS PAISES**

4. 1. *Análisis del modelo.*

Todo país, generalmente, comercia con varios países y no solamente con uno como lo hemos supuesto en los análisis anteriores. De allí que, si deseamos acercarnos a la realidad nos resulta imperioso deducir una nueva fórmula del multiplicador de exportación para cuando intervengan más de dos países.

Con el único objeto de simplificar el cálculo de la nueva fórmula, establecemos los siguientes supuestos:

a) que existe una cierta igualdad en cuanto a la importancia de las relaciones comerciales mutuas. En consecuencia, la disminución de las importaciones inducidas de B, tan sólo se sentirán

en A, en $\frac{1}{n+1}$ del monto de las mismas, siendo n el número de países además de B. Del mismo modo, las importaciones inducidas de A, se distribuirán en partes equivalentes entre los $n+1$ países con los cuales comercia;

b) que los países considerados son $n+2$, o sea, n aparte de A y B;

c) que éstos n nuevos países, tienen características muy semejantes y las mismas propensiones a ahorrar e importar, por consiguiente son idénticos a un país que lo denominamos C.

Para obtener la fórmula partimos de tres ecuaciones que expresan las condiciones de equilibrio de los tres países.

Para el país A, el nivel de equilibrio se alcanza cuando la exportación autónoma es balanceada por las importaciones inducidas, más el ahorro inducido menos las exportaciones inducidas del exterior. Con respecto a las exportaciones inducidas

del exterior, éstas se computan de la siguiente forma: $\frac{1}{n+1}$ de la disminución de las importaciones inducidas de B más $\frac{1}{n+1}$ del incremento de las importaciones inducidas de C, repetidas n veces ya que hay n países como C; o sea $\frac{n}{n+1} \Delta M_c$.

Otra forma de expresar la condición de equilibrio es por la igualdad entre el ahorro (o desahorro) inducido y el saldo neto positivo (o negativo) del comercio exterior (supuesta invariable la inversión interna).

Las ecuaciones de equilibrio para el país A, (suprimiendo como ya hemos convenido el signo Δ) son:

$$(1) \quad X = m_A Y_{A,\infty} + s_A Y_{A,\infty} - \frac{1}{n+1} m_B Y_{B,\infty} - \frac{n}{n+1} m_C Y_{C,\infty}$$

$$(1.a) \quad s_A Y_{A,\infty} = X - m_A Y_{A,\infty} + \frac{1}{n+1} m_B Y_{B,\infty} + \frac{n}{n+1} m_C Y_{C,\infty}$$

El país B, alcanza el nivel de equilibrio cuando la importación autónoma es balanceada por la disminución en el ahorro inducido más la disminución en las importaciones inducidas, menos las exportaciones inducidas del exterior. Estas se calculan de la siguiente manera: $\frac{1}{n+1}$ del incremento de las impor-

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

taciones inducidas de A más $\frac{n}{n+1}$ del incremento de las importaciones inducidas de C. La condición de equilibrio también se cumple, cuando el desáhorro inducido iguala el saldo neto de la importación.

Las ecuaciones de equilibrio para B, son:

$$(2) -X = s_B Y_{B,\infty} + m_B Y_{B,\infty} - \frac{1}{n+1} m_A Y_{A,\infty} - \frac{n}{n+1} m_C Y_{C,\infty}$$

$$(2.a) s_B Y_{B,\infty} = X - m_B Y_{B,\infty} + \frac{1}{n+1} m_A Y_{A,\infty} + \frac{n}{n+1} m_C Y_{C,\infty}$$

Las ecuaciones de A y B, guardan similitud ya que en dichos países, la exportación y la importación respectivamente son autónomas, en cambio para el país C (y los $n-1$ restantes) la situación es distinta ya que en éste el incremento de exportación es inducido del exterior (en nuestro caso, $\frac{1}{n+1}$ del incremento de importación del país A).

En consecuencia, el país C alcanza su nivel de equilibrio cuando la primera exportación inducida del exterior es balanceada por el ahorro inducido, más las importaciones inducidas menos las sucesivas exportaciones inducidas del exterior,

las cuales están determinadas así: $\frac{1}{n+1}$ de la reducción de las importaciones inducidas de B, más $\frac{n-1}{n+1}$ del incremento de las importaciones de los $n-1$ países restantes iguales al país C.

La condición de equilibrio, también se cumple, cuando el ahorro inducido iguala el saldo neto de la exportación inducida del exterior.

Las ecuaciones son:

$$(3) \frac{1}{n+1} m_A Y_{A,\infty} = m_c Y_{C,\infty} + s_c Y_{C,\infty} - \frac{1}{n+1} m_B Y_{B,\infty} - \frac{n-1}{n+1} m_c Y_{C,\infty}$$

$$(3.a) s_c Y_{C,\infty} = \frac{1}{n+1} m_A Y_{A,\infty} - m_c Y_{C,\infty} + \frac{1}{n+1} m_B Y_{B,\infty} + \frac{n-1}{n+1} m_c Y_{C,\infty}$$

Para calcular la nueva fórmula, utilizamos las ecuaciones (1.a), (2.a) y (3.a). Escribiendo $k_A X$ en lugar de $Y_{A,\infty}$ y $-k_B X$ en reemplazo de $Y_{B,\infty}$, podemos resolver las tres ecuaciones, k_A y k_B . Haciendo las sustituciones enumeradas, tenemos:

$$1.b) s_A k_A X = X - m_A k_A X - \frac{1}{n+1} m_B k_B X + \frac{n}{n+1} m_c Y_{C,\infty}$$

$$(2.b) -s_B k_B X = -X + m_B k_B X + \frac{1}{n+1} m_A k_A X + \frac{n}{n+1} m_c Y_{C,\infty}$$

$$(3.b) s_c Y_{C,\infty} = \frac{1}{n+1} m_A k_A X - m_c Y_{C,\infty} - \frac{1}{n+1} m_B k_B X + \frac{n-1}{n+1} m_c Y_{C,\infty}$$

Transformando (3.b) en:

$$(3.c) Y_{C,\infty} \left[s_c + m_c \left(1 - \frac{n-1}{n+1} \right) \right] = X \frac{1}{n+1} (m_A k_A - m_B k_B)$$

despejando $Y_{C,\infty}$ tenemos:

$$(3.d) Y_{C,\infty} = X \frac{1}{n+1} \frac{m_A k_A - m_B k_B}{s_c + m_c \left(1 - \frac{n-1}{n+1} \right)} = X \frac{m_A k_A - m_B k_B}{s_c(n+1) + 2m_c}$$

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

Sustituyendo (3.d) en (1.b) nos queda:

$$(4) \quad s_A k_A X + m_A k_A X = X - \frac{1}{n+1} m_B k_B + \frac{n}{n+1} m_C X \frac{m_A k_A - m_B k_B}{s_C(n+1) + 2 m_C}$$

Dividiendo ambos miembros por X y luego de algunas transformaciones algebraicas con el objeto de despejar k_A , resulta

$$(4.a) \quad k_A (s_A + m_A) = 1 - \frac{1}{n+1} m_B k_B + \frac{n}{n+1} m_C \frac{m_A k_A}{s_C(n+1) + 2 m_C} - \frac{n}{n+1} m_C \frac{m_B k_B}{s_C(n+1) + 2 m_C}$$

Sacando k_A factor común y después de nuevas transformaciones, resulta:

$$(4.b) \quad k_A \left[s_A + m_A - m_A \frac{n}{n+1} \frac{m_C}{s_C(n+1) + 2 m_C} \right] = 1 - \frac{1}{n+1} m_B k_B - \frac{n}{n+1} m_B k_B \frac{m_C}{s_C(n+1) + 2 m_C}$$

de donde

$$(4.c) \quad k_A = \frac{1 - m_B k_B \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \frac{m_C}{s_C(n+1) + 2 m_C} \right)}{s_A + m_A \left[1 - \frac{n}{n+1} \frac{m_C}{s_C(n+1) + 2 m_C} \right]}$$

Sustituyendo (3.d) en (2.b), nos queda:

$$(5) \quad s_B k_B X + m_B k_B X = X - \frac{1}{n+1} m_A k_A X - \frac{n}{n+1} m_C X \frac{m_A k_A - m_B k_B}{s_C(n+1) + 2 m_C}$$

Con el mismo procedimiento que hemos seguido para llegar a (4.c) a partir de (4), obtenemos:

$$(5.a) \quad k_B = \frac{1 - m_A k_A \left[\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \frac{m_C}{s_C(n+1) + 2m_C} \right]}{s_B + m_B \left[1 - \frac{n}{n+1} \frac{m_C}{s_C(n+1) + 2m_C} \right]}$$

Haciendo $\alpha = \frac{n}{n+1} \frac{m_C}{s_C(n+1) + 2m_C}$ y reemplazando esta expresión en (4.c) y (5.a), tenemos:

$$(6) \quad k_A = \frac{1 - m_B k_B \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)}{s_A + m_A (1 - \alpha)}$$

$$(7) \quad k_B = \frac{1 - m_A k_A \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)}{s_B + m_B (1 - \alpha)}$$

Sustituyendo (7) en (6), nos queda:

$$(8) \quad k_A = \frac{1}{s_A + m_A (1 - \alpha)} - \frac{m_B \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)}{s_A + m_A (1 - \alpha)} \times \frac{1 - m_A k_A \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)}{s_B + m_B (1 - \alpha)}$$

Realizando el producto indicado, resulta:

$$(8.a) \quad k_A = \frac{1}{s_A + m_A (1 - \alpha)} - \frac{m_B \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right) + m_A m_B k_A \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)^2}{[s_A + m_A (1 - \alpha)] [s_B + m_B (1 - \alpha)]}$$

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

de donde

$$(8.b) \quad k_A \left\{ 1 - \frac{m_A m_B \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)^2}{[S_A + m_A(-\alpha)] [S_B + m_B(1-\alpha)]} \right\} =$$

$$= \frac{1}{S_A + m_A(1-\alpha)} \frac{m_B \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)}{[S_A + m_A(1-\alpha)] [S_B + m_B(1-\alpha)]}$$

y despejando k_A ,

$$(8.c) \quad k_A = \left\{ \frac{1}{S_A + m_A(1-\alpha)} \frac{m_B \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)}{[S_A + m_A(1-\alpha)] [S_B + m_B(1-\alpha)]} \right\}$$

$$\times \left\{ \frac{[S_A + m_A(1-\alpha)] [S_B + m_B(1-\alpha)]}{[S_A + m_A(1-\alpha)] [S_B + m_B(1-\alpha)] - m_A m_B \left(\frac{1}{n+1} + \alpha \right)^2} \right\}$$

Resolviendo los productos indicados nos queda:

$$(8.d) \quad k_A = \frac{S_B + m_B(1-\alpha) - m_B \left(\frac{n}{n+1} + \alpha \right)}{[S_A + m_A(1-\alpha)] [S_B + m_B(1-\alpha)] - m_A m_B \left(\frac{n}{n+1} + \alpha \right)^2}$$

$$= \frac{S_B + m_B \left(\frac{n}{n+1} - 2\alpha \right)}{[S_A + m_A(1-\alpha)] [S_B + m_B(1-\alpha)] - m_A m_B \left(\frac{n}{n+1} + \alpha \right)^2}$$

Del mismo modo, k_B resulta,

$$(9) \quad k_B = \frac{s_A + m_A \left(\frac{n}{n+1} - 2\alpha \right)}{[s_B + m_B (1 - \alpha)] [s_A + m_A (1 - \alpha)] - m_A m_B \left(\frac{n}{n+1} + \alpha \right)}$$

Hemos llegado así, a la fórmula del Multiplicador de Exportación entre más de dos países, tal como la trae Machlup, en su obra ya citada.

Como puede observarse, este multiplicador depende de... s_A , m_A , s_B , m_B y a través de α de s_C y m_C .

La fórmula es una de las más completas pero su análisis dinámico es sumamente complicado; de allí que sea preferible utilizar la fórmula para dos países solamente.

Para finalizar, analizaremos qué ocurre con el país C, y las fórmulas del multiplicador en dos casos especiales, a saber:

a) cuando las propensiones a importar y a ahorrar en los países A y B son proporcionales y b) cuando dichas propensiones son iguales.

Ante todo diremos que la exactitud de los cálculos de los balances del comercio exterior, puede ser verificada fácilmente, para cualquier período de tiempo ya que siempre, la suma de los saldos netos del comercio exterior debe ser nulo para el conjunto de los $n + 2$ países considerados. En consecuencia, el país C (y los $n - 1$ restantes iguales a él), tendrá un saldo neto de exportación, en la medida que el saldo neto de exportación en A, no alcance el saldo neto de importación de B. Esto es muy importante, ya que cuando las propensiones a importar y ahorrar de A y B son proporcionales, el saldo neto de exportación de C es nulo, debido a la igualdad entre el saldo neto de exportación de A y el saldo neto de importación de B, una vez alcanzado el nivel de equilibrio.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

El proceso en el país C es el siguiente: El saldo neto de exportación del país C, da lugar a un aumento en sus importaciones y su ahorro inducido. Generalmente, las exportaciones inducidas del exterior crecen en un comienzo más que las importaciones inducidas y por consiguiente, existen saldos netos de exportación que generan incrementos en el ingreso. Pero llega un momento en que las exportaciones inducidas del exterior comienzan a disminuir (debido a la disminución en el incremento de las importaciones de A y el aumento del decremento de importación de B) y con importaciones inducidas en el propio país que siguen creciendo, el saldo neto de las exportaciones comienza a bajar. El ingreso aún continúa su movimiento ascendente pero por muy poco tiempo. Las importaciones disminuyen pero muy lentamente, lo que permite que la exportación neta caiga hasta volverse negativa, con lo que todo incremento de ingreso desaparece.

Si los países A y B tienen las propensiones a ahorrar e importar iguales, el país C (y los restantes iguales a él) desaparece del análisis ya que con iguales propensiones, el incremento en las importaciones inducidas de A, es igual a la disminución en las importaciones de B. Tan sólo se modifica la dirección de su comercio internacional pero no el saldo de su balanza del comercio exterior. La única diferencia que la fórmula del multiplicador de exportación tiene con respecto al caso de dos países, está en que el factor de repercusión se ve

disminuído en $\frac{1}{n+1}$, de la magnitud que tenía entre dos países. Las fórmulas del multiplicador para este caso especial, son:

$$k_A = \frac{1}{m_A + s_A + \frac{m_B}{n+1} \times \frac{s_A}{s_B}}$$

$$(10) \quad k_B = \frac{1}{m_B + s_B + \frac{m_A}{n+1} \times \frac{s_B}{s_A}}$$

$$k_A = k_B = \frac{1}{s_A + m_A \frac{n+2}{n+1}}$$

En lugar de considerar un cierto número de países, los cuales guardan entre ellos relaciones comerciales de igual importancia, podemos utilizar para corregir el factor de repercusión, un coeficiente que mida el porcentaje que representa el monto de las exportaciones de A hacia B, con el total de las exportaciones de A. Llamémoslo $x_{A,B}$ y con $x_{B,A}$, representamos el porcentaje del monto de exportaciones de B hacia A, sobre el total de exportaciones de B.

Luego los multiplicadores son:

$$(11) \quad k_A = \frac{1}{m_A + s_A + x_{A,B} m_B \frac{s_A}{s_B}}$$

$$k_B = \frac{1}{m_B + s_B + x_{B,A} m_A \frac{s_B}{s_A}}$$

y siendo $s_A = s_B$ y $m_A = m_B$

$$(12) \quad k_A = k_B = \frac{1}{s_A + m_A (1 + x_{A,B})}$$

EL MULTIPLICADOR DINAMICO DE EXPORTACION

En el proceso seguido en la presentación de las distintas fórmulas del multiplicador de exportación, nos hemos acercado cada vez más a la realidad económica, en cuanto se refiere a la consideración de las distintas variables del fenómeno, pero aún nos falta analizar estas mismas fórmulas en función del tiempo. En consecuencia, vamos a determinar el incremento total del ingreso nacional, después de haber transcurrido un cierto período de tiempo, ante un incremento neto de las exportaciones, ya sean éstas autónomas o inducidas. Las fórmulas ya vistas, determinan el incremento total del ingreso, para un tiempo infinito, pero ya lo hemos hecho notar en páginas anteriores, que ésta es una situación hipotética, debido a la imposibilidad casi absoluta que tiene el sistema económico para mantenerse en las mismas condiciones (sin fluctuaciones, o cambios imprevistos) durante largos períodos de tiempo.

5.1. *El Multiplicador Dinámico de una Exportación Autónoma.*

Es conveniente hacer notar que cuando hacemos un análisis dinámico, la propensión marginal a consumir, la propensión marginal a ahorrar y la propensión marginal a importar, o sea: c , s , y m , respectivamente, están definidas dinámicamente. Luego tenemos:

$$c_t = \frac{d C_t}{d Y_{t-1}}$$

$$s_t = \frac{d S_t}{d Y_{t-1}}$$

$$m_t = \frac{d M_t}{d Y_{t-1}}$$

tanto sea para el país A como para el país B.

El procedimiento a seguir será el usado hasta ahora en los análisis dinámicos, es decir, por diferencias finitas.

Debemos, primero, encontrar la ecuación que nos de el incremento de ingreso del país A, después de haber transcurrido t períodos en función de los incrementos de ingreso de los períodos precedentes.

Sabemos ya, que el incremento del ingreso en el período $t-1$ (comparado con el período 0) para el país A, es:

$$(1) \quad Y_{A,t-1} = X + c_A Y_{A,t-2} + m_B Y_{B,t-2}$$

donde el último término es negativo por ser $Y_{B,t-2}$ negativo pues representa la disminución de las exportaciones inducidas del exterior.

La ecuación (1), puede ordenarse de la siguiente manera:

$$(1.a) \quad Y_{B,t-2} = \frac{1}{m_B} (-X + Y_{A,t-1} - c_A Y_{A,t-2})$$

Ahora bien, la disminución del ingreso en el período $t-1$ (comparado con el período 0) para el país B, sabemos que es:

$$(2) \quad Y_{B,t-1} = -X + c_B Y_{B,t-2} + m_A Y_{A,t-2}$$

donde el segundo término es negativo, por ser $Y_{B,t-2}$ negativo.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

El último término viene a balancear la disminución del ingreso de B, por ser positivo, y representa el incremento de las exportaciones inducidas del exterior (en este caso, del país A).

Dando a $Y_{B,t-2}$ el valor encontrado en (1.a) tenemos:

$$(2.a) \quad Y_{B,t-1} = -X + \frac{c_B}{m_B} (-X + Y_{A,t-1} - c_A Y_{A,t-2}) + m_A Y_{A,t-2}$$

Conocido el incremento del ingreso en $t-1$, tanto para el país A como para B, podemos determinar fácilmente el incremento del ingreso en el período t . Luego

$$(3) \quad Y_{A,t} = X + c_A Y_{A,t-1} + m_B Y_{B,t-1}$$

Reemplazando $Y_{B,t-1}$ por el valor encontrado en (2.a) nos queda:

$$(3.a) \quad Y_{A,t} = X + c_A Y_{A,t-1} + m_B \left[-X + \frac{c_B}{m_B} (-X + Y_{A,t-1} - c_A Y_{A,t-2}) + m_A Y_{A,t-2} \right]$$

Efectuando las operaciones indicadas y ordenando convenientemente, resulta:

$$(3.b) \quad Y_{A,t} = X(1 - c_B - m_B) + Y_{A,t-1}(c_A + c_B) + Y_{A,t-2}(m_A m_B - c_A c_B)$$

Ecuación que nos da el incremento del ingreso de A, en el período t , en función del incremento del ingreso de dos períodos precedentes. Se eliminó el incremento del ingreso del país B, que aparecía en (3).

Estamos en presencia de una ecuación entre diferencias finitas de segundo orden, no homogénea, cuyo método de solución es igual al seguido en puntos anteriores. Ahora bien, haciendo:

$$(4) \quad r = c_A + c_B$$

que es la suma de las propensiones marginales a consumir productos nacionales, de dos países, y

$$(5) \quad \rho = m_A m_B - c_A c_B$$

que es la diferencia entre el producto de las propensiones a importar de los dos países y el producto de las propensiones a consumir, la (3.b) puede escribirse más abreviadamente, así:

$$(6) \quad Y_{A,t} = r Y_{A,t-1} + \rho Y_{A,t-2} + s_B X$$

Planteamos la ecuación homogénea y tenemos (para mayor comodidad no utilizaremos el subíndice A):

$$(7) \quad Y_t = r Y_{t-1} - \rho Y_{t-2} = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$(7.a) \quad u^t - r u^{t-1} - \rho u^{t-2} = 0$$

dividiendo por u^{t-2} , tenemos:

$$(7.b) \quad u^2 - r u - \rho = 0$$

ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4\rho}}{2} \\ \beta = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4\rho}}{2} \end{array} \right.$$

Siendo,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = r \\ \alpha \times \beta = -\rho \end{array} \right.$$

Halladas las raíces α y β de (7.b), tenemos:

$$(10) \quad X_t = a \alpha^t + b \beta^t$$

que es la solución general de la ecuación homogénea, donde a

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

y b son parámetros incógnitas que se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Para hallar $s_B X$, suponemos en (6) que $Y_t = Z_t = Z$. Luego,

$$(11) \quad Z = rZ - \rho Z - s_B X = 0$$

de donde

$$(11.a) \quad Z = \frac{s_B X}{1 - r - \rho} = \frac{s_B X}{(1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

La solución general de (6) es $Y_t = X_t + Z_t$. Luego:

$$(12) \quad Y_t = a\alpha^t + b\beta^t + \frac{s_B X}{(1 - \alpha)(1 - \beta)}$$

Siendo las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0 \\ Y_1 &= X \end{aligned}$$

llevamos estos valores a (12) con el objeto de encontrar los valores de los parámetros a y b , resultando,

$$(13) \quad \begin{cases} a + b + \frac{s_B X}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} = 0 \\ a\alpha + b\beta + \frac{s_B X}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} = X \end{cases}$$

De donde obtenemos los siguientes valores para a y b :

$$(14) \quad \begin{cases} a = X \frac{1 - \alpha - s_B}{(1 - \alpha)(\alpha - \beta)} \\ b = -X \frac{1 - \beta - s_B}{(1 - \beta)(\alpha - \beta)} \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en (12), llegamos a

$$(15) \quad Y_t = X \left[\frac{1 - \alpha - s_B}{(1 - \alpha)(\alpha - \beta)} \alpha^t - \frac{1 - \beta - s_B}{(1 - \beta)(\alpha - \beta)} \beta^t + \frac{s_B}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \right]$$

fórmula que nos da el incremento del ingreso en el período t , debido a un incremento de exportación autónoma igual a X .

Las variables fundamentales siguen siendo, s_A , m_A y s_B , m_B .

La fórmula que nos da el multiplicador "dinámico" de exportación es:

$$(16) \quad k_A = \frac{Y_t}{X} = \frac{s_B}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} + \frac{1 - \alpha - s_B}{(1 - \alpha)(\alpha - \beta)} \alpha^t - \frac{1 - \beta - s_B}{(1 - \beta)(\alpha - \beta)} \beta^t$$

5.2. El Multiplicador Dinámico de una Exportación inducida.

Hemos visto que la fórmula del multiplicador de exportación, considerando dos países para el caso de un incremento

neto de exportaciones inducidas es $k_A = \frac{1}{s_A + m_A}$. También

sabemos que el proceso completo de multiplicación del ingreso se lleva a cabo solo después de un número infinito de períodos. Por ello, lo que vamos a determinar es: 1) la fórmula que nos da el incremento total del ingreso después de haber transcurrido t períodos y 2) para qué valor de t , se logra que el proceso de multiplicación haya alcanzado el 90 % del total. Para

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

ello planteamos la siguiente ecuación entre diferencias finitas de primer orden.

$$(17) \quad Y_t = X + c Y_{t-1}$$

Resolviendo por el método de recurrencia, tenemos:

$$(17.a) \quad Y_t = X + c X + c^2 X + \dots + c^{t-1} X + c^t Y_0$$

de donde

$$(17.b) \quad Y_t = X \frac{1 - c^t}{1 - c} + c^t Y_0$$

siendo la condición inicial $Y_0 = 0$, nos queda

$$(18) \quad Y = X \frac{1 - c^t}{1 - c}$$

ecuación que nos da el incremento del ingreso en el período t para un incremento neto de exportaciones inducidas. El multiplicador dinámico de exportación inducida es:

$$(18.a) \quad k = \frac{Y_t}{X} = \frac{1 - c^t}{1 - c}$$

Para hallar el valor de t , en el cual $Y_t = 0,90 Y_\infty$, hacemos:

$$(19) \quad X \frac{1 - c^t}{1 - c} = 0,90 X \frac{1}{1 - c}$$

simplificando, resulta

$$(19.a) \quad 1 - c^t = 0,90$$

de donde

$$c^t = 0,10$$

$$(20) \quad t = \frac{\text{Log. } 0,10}{\text{Log. } c} = \frac{-1}{\text{Log. } c}$$

como $\text{log. } c$ es negativo por ser $c < 1$, t es siempre positivo.

CONCLUSIONES

6. 1. *El Multiplicador y las Economías Subdesarrolladas.*

El presente capítulo versa sobre la Teoría del Multiplicador y su utilidad en las economías subdesarrolladas.

Parece contradictorio que se hable de "utilidad" en las economías subdesarrolladas cuando en el capítulo 1 se sostuvo que el multiplicador es de validez universal es decir un concepto permanente, independiente del tiempo y del grado de desarrollo de la economía donde funciona.

Sin embargo, tal contradicción es solo aparente pues si bien el multiplicador es siempre mecánicamente posible, lo que se trata de establecer aquí es si la multiplicación no será simplemente "monetaria" sino "real". En otras palabras, si un incremento en la variable independiente (inversión, consumo, exportación, etc.) producirá un incremento en la variable dependiente (renta nacional) por aumento de la producción y no por un alza en el nivel general de precios.

¿Por qué esta modificación en el normal funcionamiento del multiplicador? ¿Cuáles son las soluciones para su utilidad práctica? Tales son los principales puntos a resolver en este capítulo.

Con tal objetivo analizamos a continuación, muy someramente, las características que permiten agrupar a las economías en desarrolladas y subdesarrolladas.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

Los autores, por lo general, están de acuerdo en considerar que el nivel del ingreso per cápita es un buen índice para medir el grado de desarrollo de un país. Así, un bajo ingreso per cápita supone un estado de subdesarrollo, en tanto, que un alto ingreso supone desarrollo. Evidentemente, éste es un índice estrictamente económico, al mismo deben acompañarlo otros índices sociales, políticos y culturales para que el análisis sea completo. Desgraciadamente la más de las veces estos últimos se suponen a veces consecuencia del estado económico y otras veces causas previas de dicho nivel económico, por lo cual, se los supone incluidos en el índice que mide el ingreso per cápita. Lo lógico y correcto es pensar que no son ni causa ni efecto, sino que todos los índices son interdependientes y que deben ser estudiados con igual importancia.

En ese sentido puede sostenerse que un país es subdesarrollado si cae dentro de una cualquiera de las siguientes tres etapas del crecimiento económico: a) economía tradicional; b) precondiciones del despegue y c) el despegue (take off) ⁽¹⁸⁾.

La economía tradicional es aquélla en la cual no se ha utilizado aún la técnica moderna para la explotación de los recursos. No se supone estacionaria pues es posible el aumento de la producción por el mejoramiento de los sistemas de cultivo o de riego, por el aumento de la población, etc. Como la agricultura es la explotación principal surge, por lo general, un régimen feudal de propiedad y necesariamente un tope en la producción por habitante, ante la inaccesibilidad de la técnica y del desarrollo de la ciencia moderna.

Resulta difícil ubicar hoy en día un país que pase por esta etapa. Los medios de comunicación y difusión han propagado los progresos de la ciencia llegando a los rincones más

(18) La clasificación por etapas corresponde a las planteadas por W. W. Rostow en "The Stages of the Economic Growth" Cambridge University Press, 1960). (Hay traducción al español por el Fondo de Cultura Económica de Méjico).

apartados del mundo. Lo que es más fácil es encontrar dentro de ciertos países, regiones que se encuentran en dicho estado de subdesarrollo primitivo.

La segunda etapa, la de las precondiciones del despegue, se caracteriza por la germinación de la industria aunque en estado muy rudimentario. En ella aparecen los primeros organismos financieros, se tecnifica la agricultura y se hacen grandes inversiones en caminos, medios de transporte, escuelas, hospitales, etc. En la faz política nace un gobierno nacional centralizado, de fuerte tendencia nacionalista y de oposición a intereses de poder regional o colonialista. Por esta etapa pasan la mayor parte de las naciones subdesarrolladas del mundo.

La tercera y la más importante es la del despegue económico. Se ha dado a llamar a los países que se ubican en esta etapa "en vías de desarrollo" para indicar el paso intermedio entre el desarrollo y el subdesarrollo propiamente dicho.

Las industrias se expanden rápidamente y las ganancias se reinvierten en plantas y equipos aumentando la capitalización del país. La inversión oscila entre el 5 y el 10 % del ingreso nacional y un crecimiento permanente es la norma.

El paso siguiente es el de la madurez económica, en la cuál la sociedad alcanza un alto grado de desarrollo y por último el del alto consumo masivo, en el que solo han entrado Estados Unidos, Gran Bretaña, Alemania, Francia, Suecia, Canadá y Australia. Este último estado se caracteriza por un alto grado de desarrollo en el consumo de servicios y bienes duraderos. Aunque Rusia económicamente puede entrar en el mismo, aún no lo ha hecho, lo que se atribuye a que atentaría contra el sistema de gobierno implantado hasta ahora. Sin embargo recientemente se están haciendo modificaciones tendientes a aumentar el consumo de bienes duraderos.

Hecha esta discriminación previa, centramos nuestra atención en el índice económico, es decir en el nivel del ingreso per

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

cápita y veamos cuándo el ingreso es bajo, cómo funciona el multiplicador según el comportamiento de la oferta y la demanda global.

Supuesto que toda unidad de ingreso se gasta parte en el consumo de bienes nacionales, parte en importación y que el resto se ahorra, la tendencia observada en las economías subdesarrolladas ante un incremento del ingreso, es aumentar los gastos ya sea en consumo o importación o ambas cosas a la vez.

Este comportamiento se atribuye: 1) al bajo ingreso per cápita que permite la existencia de ciertas necesidades primarias aún insatisfechas y 2) al efecto demostración que da lugar a que se consideren insatisfechas necesidades secundarias. Por el efecto demostración la población, en general, imita niveles de comodidad de sociedades más avanzadas haciendo sentir que es una necesidad lo que aún debiera ser prohibitivo, para ese estado de desarrollo de la economía. La existencia de una gran cantidad de necesidades insatisfechas, originadas por uno u otro motivo, se constituye en un fuerte centro de atracción, hacia donde se canaliza la mayor parte de todo incremento de ingreso. Luego, todo incremento en la cantidad de dinero en circulación, que se traduzca en un aumento en la demanda de bienes de consumo, lejos de provocar o favorecer la multiplicación real del ingreso nacional, es causa generatriz de un alza en el nivel general de precios.

En estas economías, la conocida y desechada Teoría Cuantitativa del Dinero tiene cierta importancia. La cantidad de dinero en circulación, es una de las determinantes fundamentales en el nivel general de precios, por ser la función de la preferencia por la liquidez, fuertemente inelástica a la tasa de interés.

Conviene recordar, que los motivos de la preferencia por la liquidez son tres: 1) Motivo Transacción, 2) Motivo Precaución y 3) Motivo Especulación. De éstos, el motivo especu-

lación se comporta en forma diferente al de los países desarrollados. Poca es la cantidad en efectivo que en condiciones normales la colectividad desee mantener para la especulación, debido a los bajos ingresos, que impide que la cantidad de dinero existente se adecúe a las necesidades por satisfacer.

En consecuencia el dinero sigue canalizándose hacia las "transacciones" y "precauciones".

Luego, desde el punto de vista de la demanda total, ésta aumenta cuando aumenta el ingreso y en una economía desarrollada tal comportamiento favorece al multiplicador y tal debiera ser en las subdesarrolladas. Pero, veamos qué pasa con la oferta que debe satisfacer dicho incremento de demanda.

Si la oferta fuera inelástica se podría hacer frente a la misma sin mayor alza en los costos y con un aumento del producto nacional real.

Más la realidad es otra. La escasez de capital y de una mano de obra especializada determinan una oferta inelástica. Las empresas trabajan a capacidad plena e insuficiente y todo incremento en la demanda solo es posible satisfacerlo parcialmente y con altos costos.

Otra variable importante en la determinación del gasto es la importación. Mientras en los países desarrollados la elasticidad importación-ingreso es menor que uno, en la mayor parte de las economías periféricas es mayor que uno. Esto, evidentemente, es perjudicial para dichas economías y más aún si se agrega que más del 50 % del total es en bienes de consumo durable, artículos de lujo e insumos.

Una alta propensión a importar, atenta contra el multiplicador de exportación que es el de mayor importancia en los países subdesarrollados, por ser las exportaciones una de las principales fuentes de ingreso, mientras que las inversiones internas apenas representan en los más avanzados un 10 % del ingreso nacional.

De modo, que solo puede esperarse que el impulso inicial en el proceso de multiplicación del producto nacional surja de las exportaciones (autónomas o inducidas) y en consecuencia, es el Multiplicador de Exportación al que se le debe prestar especial atención.

Definido ya el multiplicador de exportación en su forma más simple como uno sobre la suma de las propensiones marginales a ahorrar e importar, o sea $\frac{1}{m_A + s_A}$, se observa clara-

mente que cuanto mayor sea la propensión marginal a importar, permaneciendo constante la otra, menor será el valor numérico que alcance el multiplicador.

Si se comparan los posibles valores que puede tener en economías de distintos grados de desarrollo, se observa que si bien la alta propensión a importar en los países periféricos disminuye su valor, la baja propensión a ahorrar puede compensar parcialmente la filtración. En tanto, que en las economías desarrolladas se presenta el fenómeno inverso, o sea baja propensión a importar y alta propensión a ahorrar.

Del análisis que se ha hecho hasta aquí se desprende: 1º) que la alta propensión a importar, en su mayor parte en bienes de consumo y lujo disminuye el valor numérico del multiplicador y 2º) que la carencia de capitales y de mano de obra especializada, al limitar la oferta se convierte en un factor estructural de estrangulamiento, que impide en gran medida, que el posible valor alcanzado por el multiplicador no se traduzca en una incrementación real de la producción sino simplemente monetaria.

Sin embargo, a pesar de dichas circunstancias no debe interpretarse que el multiplicador sea inútil en las economías subdesarrolladas y que por el contrario en las economías desarrolladas el proceso de multiplicación real se lleva a cabo sin inconvenientes.

En efecto, en estas últimas cabe señalar que su acción disminuye para los períodos de prosperidad. En esta etapa del ciclo, la carencia de mano de obra especializada determina una oferta inelástica que afecta el incremento de la producción y cuanto mayor es la escasez de recursos, tanto mayor, es la imposibilidad de una multiplicación real del ingreso. Luego, el problema no debe plantearse como utilidad o inutilidad del multiplicador pues el funcionamiento teórico es siempre el mismo; lo que sí debe plantearse es la modificación de ciertos factores subyacentes estructurales o que se originan en ciertas fases del ciclo y a cuya eliminación debe procederse para el funcionamiento real del multiplicador.

Tanto en uno como en otro tipo de economía, estos factores estructurales o subyacentes se manifiestan bajo la forma de una oferta inelástica. En las economías subdesarrolladas la inelasticidad de la oferta es función principalmente de la escasez de capital y es esta escasez de capital a la que debemos proponerle soluciones.

La forma normal de financiamiento de capital es el ahorro de la población. Pero en estos países el volumen de ahorro es bajo e insuficiente ya sea: a) porque la propensión marginal a ahorrar es baja; b) porque el volumen de los ingresos es bajo y c) porque se ha creado una situación psicológica por parte del gobierno y del pueblo de creer, que es imposible pensar en el ahorro como medio capaz de financiar la carencia de capitales y que solo lo pueden hacer los préstamos y donaciones extranjeros.

Se agrava la situación si se tiene en cuenta que el escaso volumen de ahorro se canaliza en gran parte hacia la especulación y la adquisición de bienes suntuarios. En estos últimos años, favorecidas por el rápido proceso inflacionario se han creado numerosas sociedades mal llamadas "sociedades de inversión". Ellas orientan el ahorro de la población hacia la co-

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

mercantilización de los bienes en forma especulativa, favoreciendo el consumo por los sistemas de créditos y agravando los costos.

La inherente inestabilidad política de estos países facilita la fuga de los propios capitales nacionales a otros países que ofrecen mayor seguridad, generalmente Estados Unidos y Canadá. A fines de 1959 el total de fondos depositados en los Estados Unidos se estimó en 2.500 millones de dólares (19).

Siendo el panorama descrito a grandes rasgos, el que se ofrece en estas economías no queda por el momento otra solución viable que recurrir a otras fuentes de financiación externas para la formación interna de capital.

Tal es entre otras, la radicación de capitales extranjeros con cláusulas especiales a determinar para cada caso. En particular, evitando la fuga en su mayor parte de los dividendos y proponer su reinversión en el país, dando participación a la mano obrera, que debiera ser, siempre que sea posible, nacional. Otras formas, lo son los empréstitos, las subvenciones y la integración de las economías de los países que presenten similares condiciones socio-culturales y económicas.

Analicemos la situación de estos modos de financiación para América Latina.

Con respecto a la radicación de capitales extranjeros, no podemos ignorar la nueva tendencia de los mismos de dirigirse a Europa o Asia y Africa. En Europa, porque ofrece actualmente mejores oportunidades de inversión, con un alto mercado de consumo, un alto grado de desarrollo técnico y abundante mano de obra especializada; en Asia y Africa por razones fundamentalmente políticas, ya sea por el mantenimiento de colonias o para contrarrestar la influencia del Comunismo.

(19) WIONCZEK, Miguel: "El financiamiento de la integración económica de América Latina", Revista El Trimestre Económico, enero-marzo 1960.

Según Wionczeck ²⁰) 'una encuesta de la Mc Graw Hill, reveló que para 1960, del total de la nueva inversión extranjera directa norteamericana un 47 % se destinaría a Europa en comparación con el 40 % de 1957 y 1958''.

En cuanto a los empréstitos y donaciones son aún de pequeño monto, alcanzando apenas un 4 % de la inversión neta y se han beneficiado principalmente tres países, Brasil, Colombia y Méjico. Mientras tanto el pago por la deuda externa para 1958 ascendió a un 8,8 % del total de las exportaciones frente a un 2,4 % de 1950.

En consecuencia, el panorama económico de América Latina parece ser bastante sombrío. Ni el ahorro interno, ni la radicación de los capitales extranjeros, ni los empréstitos o subvenciones, le son de gran ayuda para su liberación económica.

Queda aún por analizar las ventajas que la integración de las economías de estos veinte países traería consigo.

La creación de mercados comunes es de reciente data (aún cuando la idea es muy antigua) y como ejemplo sumamente ilustrativo puede considerarse el mercado común europeo. El mismo fue creado en 1956 por el Tratado de Roma y permitió la restauración de economías que se estaban levantando después de la Segunda Guerra Mundial.

En el caso de América Latina la integración crearía en principio nuevos mercados, nuevos incentivos de inversión y aumentarían las instituciones financieras, las cuales habrían de canalizar los ahorros de la población hacia una inversión real y no hacia la simple comercialización o la especulación.

El 17 de febrero de 1960 se firmó el Tratado de Montevideo, por el cual se unían económicamente siete países, a saber: Argentina, Brasil, Chile, Méjico, Paraguay, Perú y

(20) WIONCZEK, Miguel: op. cit. pág. 24.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

Uruguay. Está en tratativas la entrada de Colombia. Se creó así la Asociación Latinoamericana de Libre Comercio, como el primer paso dado hacia un firme crecimiento económico que se logrará con el aumento del capital y la técnica utilizada. La misma solución se quiere dar a los nuevos países africanos proponiendo su integración económica. Esta nueva tendencia en el mundo entero hacia los grandes espacios económicos, como solución de gran parte de sus problemas, nos lleva a la conclusión que la humanidad está pasando por la etapa de la integración de las naciones, como hace varios siglos atrás se integraron feudos para formar naciones. La integración, si bien es aún económica, tiene como último objetivo la unidad política. Para ello, es indispensable por el momento, que se trate de países con condiciones socio-culturales y económicas semejantes. El último paso deberá ser la unidad del mundo entero. Aunque momentáneamente parece bastante lejos de la realidad puede afirmarse que también está lejos de ser un imposible.

Luego, si con la integración de las economías Latinoamericanas, se eliminarán o se reducirán las deficiencias estructurales, el multiplicador en un comienzo de exportación y luego el de la inversión interna, ayudarán a que el país alcance más prontamente un grado de desarrollo mayor.

El grado de desarrollo está en función del sector estructural más atrasado de toda la economía y es menester mejorar la tasa de crecimiento de este sector para que la tasa de crecimiento total aumente más que proporcionalmente.

La tasa de crecimiento económico es función de la velocidad de aumento de la producción del sector más desarrollado siendo a su vez dicha velocidad función de la tasa de formación de capital y del grado de adelanto de la técnica desarrollada.

6. 2. *Relación entre el tiempo del proceso de multiplicación y su valor.*

Un aspecto sumamente importante a considerar, es el que relaciona el tiempo en que se lleva a cabo el proceso de multiplicación y el valor numérico que alcanza el mismo. El tiempo no está referido al multiplicador total, que se logra en un número infinito de períodos sino al multiplicador truncado o parcial. O sea, se quiere determinar, por ejemplo, el tiempo necesario para lograr un 90 % del valor del multiplicador total o cualquier otro por ciento (la deducción matemática se realizó en 5.2).

Veamos las distintas situaciones que se presentan para el multiplicador de exportación entre dos países.

Supongamos, en una primera hipótesis, que no existe factor de repercusión debido a que las propensiones marginales a ahorrar en los dos países son nulas. La fórmula se reduce a:

$$k_A = \frac{1}{m_A}$$

En este caso cuanto mayor es la propensión marginal a importar m_A menor es el valor del multiplicador, pero al ser mayor la filtración, menor es también, el tiempo necesario para que se cumpla el proceso de multiplicación real del ingreso nacional, o bien, mayor es la velocidad con que se alcanza el nuevo nivel de equilibrio.

En una segunda hipótesis, tenemos en cuenta no solo la propensión marginal a importar de nuestro país, sino también la propensión marginal a ahorrar que constituye filtración interna. O sea,

$$k_A = \frac{1}{m_A + s_A}$$

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

Supuesta constante una de las dos propensiones, las variaciones en la otra producirán variaciones en el mismo sentido sobre la velocidad de la multiplicación y en sentido contrario con respecto al valor que alcanzará el multiplicador. En esta fórmula, el aumento del ingreso nacional se ve detenido antes que las importaciones inducidas iguallen el incremento en la exportación autónoma más las exportaciones inducidas del exterior (dando lugar a un superavit). Lo que significa que el ahorro adicional queda compensado con la inversión en el extranjero.

En una tercera hipótesis (caso más real que los dos anteriores) se consideran a más de las propensiones del caso precedente, las propensiones marginales a ahorrar e importar del país B, entrando a jugar el factor de repercusión al no ser nulo el ahorro de los países.

La fórmula es la correspondiente al multiplicador de exportación entre dos países (de una exportación autónoma),

$$k_A = \frac{1}{m_A + s_A + m_B \frac{s_A}{s_B}}$$

Si suponemos constantes las propensiones nacionales y hacemos actuar el factor de repercusión $m_B \frac{s_A}{s_B}$, observamos, que cuanto mayor sea la propensión marginal a importar del país B, menor será el multiplicador y que cuanto mayor sea la propensión marginal a ahorrar de B será mayor el valor de k_A .

Resumiendo, las propensiones marginales a ahorrar e importar nacionales y la propensión marginal a importar del país extranjero, guardan relación directa con la velocidad del

proceso de la multiplicación y relación inversa con el valor que alcanza el multiplicador. Cuanto mayor es la velocidad menor es el tiempo necesario para la multiplicación y menor es el valor del multiplicador. Velocidad y tiempo son inversamente proporcionales; velocidad y valor del multiplicador son inversamente proporcionales; tiempo y valor del multiplicador son directamente proporcionales.

La otra propensión marginal que nos queda, o sea la propensión marginal a ahorrar del país B guarda relación inversa con la velocidad y relación directa con el valor del multiplicador nacional.

Habíamos dicho en párrafos anteriores, que en estos casos donde el ahorro no era nulo, el aumento del ingreso nacional se detenía antes que las importaciones igualasen la exportación autónoma y la exportación inducida del exterior, dando lugar a un superavit que significaba que el ahorro nacional se compensaba con la inversión en el extranjero.

Pero ésto, solo es cierto si se supone la condición de Machlup que la inversión interna es constante, sin embargo, Nurkze bien señala que no es necesario dicho supuesto por cuanto si bien el efecto acelerador puede ser impredecible también es cierto que lo es el efecto multiplicador de un flujo de gastos ya que es poco probable que la propensión marginal a importar permanezca constante.

UN CASO PARTICULAR: ARGENTINA

7.1. *Un análisis concreto.*

La Argentina es un país que puede considerarse no propiamente subdesarrollado, sino en proceso de desarrollo. Su ingreso medio per cápita y sus condiciones socio-culturales contribuyen a ubicarlo como un pueblo que pasa por el período de transición en su desarrollo económico.

Sin embargo, después de 1930, se ha producido un estancamiento en su tasa de crecimiento, la cual lejos de aumentar ha disminuído, principalmente en los últimos diez años. Desde 1949 en adelante, el ingreso bruto por habitante baja, manteniéndose casi constante entre 1953 a 1958 en un nivel de \$ 3.500 anuales, aproximadamente.

Respecto a las importaciones, lejos de disminuir han ido creciendo sin guardar relación alguna con las variaciones del ingreso nacional. Como veremos más adelante, este fenómeno introduce serias complicaciones para el cálculo del multiplicador de exportación, de acuerdo a los modelos desarrollados en capítulos anteriores.

Para determinar el valor del multiplicador de exportación para Argentina, supuesto el comercio entre dos países, he considerado a mi país con Inglaterra en un caso, y con Estados Unidos, en otro.

La elección de estas dos naciones se hizo teniendo en cuenta el gran volumen de comercio que Argentina mantiene con

ellos y la existencia de los datos estadísticos necesarios para el cálculo.

La propensión marginal a ahorrar de la Argentina se ha obtenido restando de la unidad la propensión marginal a importar más la propensión marginal a consumir bienes nacionales.

Para calcular la propensión marginal a consumir bienes nacionales, se han elaborado series de consumo per-cápita, de bienes nacionales que abarcan el período 1950-58, que se detallan en la Tabla N^o 1.

Los datos de consumo de bienes nacionales se obtuvieron por diferencia entre los datos de consumo total y la suma de los siguientes rubros de bienes de consumo y bienes intermedios para el consumo, importados:

- I - Sustancias alimenticias.
- II - Tabaco y manufacturas.
- III - Bebidas.
- IV - Sustancias y productos químicos y farmacéuticos, aceites y pinturas.
- V - Textiles y sus manufacturas.
- VI - Papel, cartón y sus artefactos.
- VII - Caucho y sus manufacturas.
- VIII - Maderas y sus artefactos.
- IX - Combustibles y lubricantes.
- X - Artículos varios.

De los tres últimos rubros se ha considerado un 50 % para el consumo y un 50 % para la inversión. Los datos, que fueron extraídos del "Comercio Exterior", 1958, publicado por la Dirección Nacional de Estadísticas y Censos, los he calculado a precios constantes de 1950, mediante índices del poder adquisitivo de la moneda.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

Las cifras de consumo total se sacaron del "Boletín Mensual de Estadística" de julio de 1959.

Para el cálculo he supuesto una relación lineal, respectivamente del consumo y la importación con el ingreso, aplicando siempre el método de los cuadrados mínimos.

A partir de la Tabla N° 2 se obtiene la siguiente función consumo-dinámica y estocástica:

$$(1) \quad c_t = 0,64 Y_{t-1} + 396 + u_t$$

O sea una propensión marginal a consumir bienes nacionales igual a 0,64. Con u_t simbolizamos la variable estocástica.

La propensión marginal a importar surge de los datos de la Tabla N° 6, con un valor de 0,39.

Resulta entonces una propensión marginal a ahorrar negativa igual a $-0,03$. Este resultado lo podemos obtener por cálculo directo o por diferencia, a partir de la fórmula,

$$(2) \quad s_A = 1 - c_A - m_A$$

Para Estados Unidos resultó: (Tablas N° 4 y N° 7)

propensión marginal a consumir = $c = 0,68$

propensión marginal a importar = $m = 0,02$

propensión marginal a ahorrar = $s = 0,30$.

Para Inglaterra se tiene: (Tablas N° 5 y N° 8)

propensión marginal a consumir = $c = 0,74$

propensión marginal a ahorrar = $s = 0,15$

propensión marginal a importar = $m = 0,11$.

La propensión marginal a consumir obtenida para los Estados Unidos e Inglaterra, es global. Por no disponer de los datos de importación de bienes de consumo, parto de la hipótesis que ambas propensiones marginales son iguales, es decir que el comportamiento gráfico del consumo total y del consumo de bienes nacionales, en función del ingreso, son paralelos.

Para el cálculo de las propensiones marginales a consumir de estos dos países he seguido el método de Haavelmo ⁽¹⁵⁾, es decir que considero la inversión como variable exógena, en el siguiente modelo estocástico:

$$(3) \quad \begin{cases} C_t = \alpha Y_t + \beta + u_t \\ Y_t = C_t + I_t \end{cases}$$

el cuál resulta bajo la forma reducida:

$$(4) \quad \begin{cases} C_t = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_t + \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{u_t}{1-\alpha} \\ Y_t = \frac{1}{1-\alpha} I_t + \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{u_t}{1-\alpha} \end{cases}$$

donde α nos define la propensión marginal a consumir. Estos resultados están sostenidos por un alto grado de correlación entre cada variable endógena —consumo e ingreso— con la variable exógena —inversión—, lo que confirma la bondad del sistema elegido.

Para la Argentina se dedujo directamente la propensión marginal a consumir bienes nacionales a partir de la expresión, con variable desplazada:

$$(5) \quad C_t = \alpha Y_{t-1} + \beta + u_t$$

donde el desplazamiento es de 4 meses, lo que supone una velocidad ingreso de la moneda igual a tres. Esta función consumo se da en (1).

Se ha desechado la aplicación del método de Haavelmo a nuestro país debido a que el valor obtenido para el coeficiente

(15) HOOD and KOOPMANS, *Studies in Econometric Method*. John Wiley and Sons. New York, 1953.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

de regresión del consumo respecto a la inversión está sostenido por un bajo coeficiente de correlación, lo cual nos hace avanzar en la hipótesis que la variable inversión no actúa preponderantemente como variable exógena y, más aún, no resulta ser en el período considerado, la determinante principal del consumo en la Argentina.

Las variables C_t , I_t e Y_t , (consumo, inversión e ingreso) se han calculado "per cápita", para los tres países en sus respectivas unidades monetarias, a fin de eliminar la variable población en la determinación de los niveles de dichas variables macroeconómicas.

El coeficiente de correlación r entre las variables C_t e I_t y entre Y_t e I_t , en las ecuaciones de regresión, bajo la forma reducida del método de Haavelmo, dadas en (4), resulta:

a) para la Argentina:

$$r_{C,I} = 0,271$$

$$r_{Y,I} = 0,635$$

$$n = 10$$

b) para los Estados Unidos:

$$r_{C,I} = 0,611$$

$$r_{Y,I} = 0,689$$

$$n = 7$$

c) para Inglaterra:

$$r_{C,I} = 0,947$$

$$r_{Y,I} = 0,998$$

$$n = 7$$

La forma reducida del modelo (4), siguiendo el método de Haavelmo, que estima la función consumo a partir de la hipótesis que considera la variable inversión como variable exógena, resulta respectivamente:

a) para la Argentina:

$$(6) \quad \begin{cases} C_t = 0,578 I_t + 2353,59 + v_t \\ Y_t = 1,578 I_t + 2353,59 + v_t \end{cases}$$

de donde tenemos para la función consumo:

$$C_t = 0,366 Y_t + 1.499,10 + u_t$$

b) para los Estados Unidos:

$$(7) \quad \begin{cases} C_t = 2,167 I_t + 906,93 + v_t \\ Y_t = 3,167 I_t + 906,93 + v_t \end{cases}$$

de donde, la función consumo resulta:

$$C_t = 0,684 Y_t + 286,35 + u_t$$

c) para Inglaterra:

$$(8) \quad \begin{cases} C_t = 2,816 I_t + 138,39 + v_t \\ Y_t = 3,816 I_t + 138,39 + v_t \end{cases}$$

siendo en consecuencia la función consumo:

$$C_t = 0,738 Y_t + 36,32 + u_t$$

Para la obtención de la función de importación, he supuesto que la misma responde al siguiente modelo:

$$(9) \quad M_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_1 + w_t$$

donde el desplazamiento es de cuatro meses como en el caso de la función consumo para nuestro país.

Los resultados obtenidos son:

a) para la Argentina:

$$(10) \quad M_t = 0,389 Y_{t-1} - 19.664 + w_t$$

b) para los Estados Unidos:

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

$$(11) \quad M_t = 0,024 Y_{t-1} + 3,328 + w_t$$

c) para Inglaterra:

$$(12) \quad M_t = 0,11 Y_{t-1} + 1.609 + w_t$$

La serie de las importaciones para Argentina se convirtieron a valores del año 1950, mediante la aplicación del índice del poder adquisitivo de la moneda, deducido en base al cociente entre el Producto Bruto Nacional a precios de 1950 y el Producto Bruto Nacional a precios corrientes.

La circunstancia de haber obtenido para Argentina, en el período 1950-58, una propensión a ahorrar negativa, al descomponer la unidad en la suma de las tres propensiones marginales que se consideran, vuelve inadecuado el modelo del multiplicador de exportación entre dos países, para un incremento autónomo de exportación, a saber:

$$(13) \quad k_A = \frac{Y_{A,\infty}}{X} = \frac{1}{m_A + s_A + m_B \frac{s_A}{s_B}}$$

debido a que este modelo supone positivas las propensiones marginales a ahorrar.

Para el caso argentino, siendo $s = -0,03$, resultado explicable a la luz de los acontecimientos económicos de Argentina, en los últimos diez años, que determinan una tasa de crecimiento económico negativa ⁽¹⁶⁾, se plantea la necesidad de deducir un nuevo modelo que tenga en cuenta esta situación.

Para ello se debe partir de la siguiente expresión, que recoja el incremento de ingreso debido a la s negativa, para el país A:

(16) BANCO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA. Memoria y Balance General del décimoséptimo ejercicio correspondiente al año 1959. página 18.

$$(14) \quad Y_{A,\infty} = X + c_A Y_{A,\infty} - s_A Y_{A,\infty} + m_B Y_{B,\infty}$$

siendo

$$(15) \quad Y_{B,\infty} = -X + c_B Y_{B,\infty} + m_A Y_{A,\infty}$$

de donde, despejando $Y_{B,\infty}$ y llevando su valor a (14) resulta.

$$Y_{A,\infty} = X + c_A Y_{A,\infty} - s_A Y_{A,\infty} + \frac{m_A m_B Y_{A,\infty} - m_B X}{1 - c_B} \quad \therefore$$

(16)

$$X(1 - c_B - m_B) = Y_{A,\infty} [(1 - c_B)(1 - c_A + s_A) - m_A m_B]$$

con lo que tenemos para el multiplicador de exportación en función de m y s :

$$(17) \quad k_A = \frac{Y_{A,\infty}}{X} = \frac{1}{m_A + 2s_A + 2m_B \frac{s_A}{s_B}}$$

Resulta interesante destacar su notable analogía con el que responde a una s_A positiva, reproducido en (13).

Esta propensión marginal a ahorrar negativa surge como consecuencia del exceso de las importaciones con respecto al ahorro interno. Esta situación de desahorro solo puede sostenerse durante un corto período de tiempo pues conduce a una descapitalización del país.

Es posible, que aún a tasas elevadas de desahorro, la ecuación (17) dé un resultado numéricamente aceptable, pero lo cierto es que ese valor numérico que debe incrementar el ingreso nacional, nunca lo hará en forma real, particularmente en las economías subdesarrolladas que trabajan con plena ocupación de uno o varios de los factores de la producción. Esa

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

tendencia al desahorro, viene a aumentar el gasto en bienes y servicios ante el cual la oferta nacional no puede hacer frente por ser inelástica y en consecuencia se genera o agrava un proceso inflacionario.

Con una propensión marginal a ahorrar negativa, el proceso de multiplicación del ingreso desde el punto de vista puramente monetario, no se detiene cuando las importaciones inducidas igualan a la exportación autónoma, sino que sigue creciendo, a causa que el desahorro interno es asimilable a un aumento en el consumo.

Paradójicamente, en un país desarrollado el desahorro es en ciertas circunstancias beneficioso. Tal es el caso, en un período de depresión, en el cual el desahorro se traducirá en un aumento en el consumo de bienes y servicios con lo que se incrementará la inversión inducida, iniciándose así, un proceso de recuperación y por consiguiente de incrementación real del ingreso.

En general, hasta tanto no exista plena ocupación de uno de los factores de la producción, la propensión marginal a ahorrar negativa (tal como lo hemos obtenido por diferencia entre la unidad y la suma de las propensiones marginales a consumir bienes nacionales y a importar) incrementará a "corto plazo", la producción real.

Desgraciadamente, esta propensión marginal a ahorrar negativa se manifiesta en los países subdesarrollados siendo perjudicial para los mismos por las razones apuntadas más arriba, en tanto que en los países desarrollados, la elevada tasa de ahorro viene a ser el principal factor que determina la paralización del proceso de multiplicación antes que las importaciones igualen a la exportación autónoma.

Para la obtención del multiplicador de una exportación autónoma de Argentina a Estados Unidos, llevamos los valores de las propensiones marginales obtenidos para estos países,

que se detallan en la tabla N° 9, a la fórmula (17), por ser s_A negativo. Reemplazando valores tenemos:

$$(18) \quad k_A = \frac{1}{0,39 - 0,06 - 0,02 \frac{0,06}{0,30}} = \frac{1}{0,328} = 3,05$$

Para el caso de una exportación autónoma de Argentina a Inglaterra, el multiplicador de exportación resulta:

$$(19) \quad k_A = \frac{1}{0,39 - 0,06 - 0,11 \frac{0,06}{0,15}} = \frac{1}{0,286} = 3,50$$

Para determinar lo que incrementará el ingreso al cabo de t períodos, en lugar de un número infinito de períodos, debemos determinar una nueva fórmula del multiplicador de exportación, entre dos países, ahora en función del tiempo transcurrido, o sea una formulación dinámica.

La ecuación (16) obtenida en el capítulo 3, según la cual

$$k_A = \frac{Y_t}{X} = \frac{s_B}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{1-\alpha-s_B}{(1-\alpha)(\alpha-\beta)} \alpha^t - \frac{1-\beta-s_B}{(1-\alpha)(\alpha-\beta)} \beta^t$$

Para

$$\begin{cases} \alpha = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4\rho}}{2} \\ \beta = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4\rho}}{2} \end{cases}$$

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

siendo

$$\begin{cases} r = c_A + c_B \\ \rho = m_A m_B - c_A c_B \end{cases}$$

no nos es útil puesto que supone que s_A y s_B son positivas. Surge en consecuencia la necesidad de determinar una nueva fórmula para cuando una de las propensiones marginales a ahorrar es negativa. En este caso s_A .

Para ello partimos de la siguiente ecuación:

$$(20) \quad Y_{A,t} = X + c_A Y_{A,t-1} - s_A Y_{A,t-1} + m_B Y_{B,t-1}$$

donde el tercer término es positivo por ser s_A negativo y el último término es negativo por ser $Y_{B,t-1}$ negativo. Luego el incremento del ingreso en A, está dado por la exportación autónoma más el consumo inducido del incremento del ingreso del período anterior más el desahorro y menos las exportaciones inducidas del exterior.

Para sustituir $Y_{B,t-1}$, en función de $Y_{A,t-1}$ e $Y_{A,t-2}$ partimos de:

$$(21) \quad Y_{A,t-1} = X + c_A Y_{A,t-2} - s_A Y_{A,t-2} + m_B Y_{B,t-2}$$

despejando $Y_{B,t-2}$,

$$(22) \quad Y_{B,t-2} = \frac{1}{m_B} (-X + Y_{A,t-1} - c_A Y_{A,t-2} + s_A Y_{A,t-2})$$

ahora bien,

$$(23) \quad Y_{B,t-1} = -X + c_B Y_{B,t-2} + m_A Y_{A,t-2}$$

Sustituyendo en (23) $Y_{B,t-2}$ por (22), resulta:

$$(24) \quad Y_{B,t-1} = -X \left(1 + \frac{c_B}{m_B} \right) + \frac{c_B}{m_B} Y_{A,t-1} + \left[\frac{c_B}{m_B} (s_A - c_A) + m_A \right] Y_{A,t-2}$$

Llevando (24) a (20), tenemos,

$$(25) \quad Y_{A,t} = X + c_A Y_{A,t-1} - s_A Y_{A,t-1} - X (m_B + c_B) + \\ + c_B Y_{A,t-1} + [c_B (s_A - c_A) + m_A m_B] Y_{A,t-2}$$

Resolviendo los productos indicados y agrupando,

$$(26) \quad Y_{A,t} = X (1 - c_B - m_B) + Y_{A,t-1} (c_A - s_A + s_B) + \\ + Y_{A,t-2} (c_B s_A + m_A m_B - c_A c_B)$$

Haciendo,

$$\begin{cases} b = c_A - s_A + s_B \\ \beta = c_B s_A + m_A m_B - c_A c_B \end{cases}$$

La (26) se transforma en:

$$(27) \quad Y_{A,t} = s_B X + b Y_{A,t-1} + \beta Y_{A,t-2}$$

ecuación entre diferencias finitas de segundo orden cuyas condiciones iniciales son, $Y_{A,0} = 0$; $Y_{A,1} = X$.

Las raíces correspondientes a la ecuación homogénea son:

$$u_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4\beta}}{2}$$

$$u_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4\beta}}{2}$$

Llevando estos valores a la ecuación reducida y luego de seguir un procedimiento análogo al de la ecuación (16) en el capítulo 3, resulta:

$$(28) \quad Y_{A,t} = X \left[\frac{s_B}{(1 - u_1)(1 - u_2)} + \right. \\ \left. + \frac{1 - u_1 - s_B}{(1 - u_1)(u_1 - u_2)} u_1^t - \frac{1 - u_2 - s_B}{(1 - u_2)(u_1 - u_2)} u_2^t \right]$$

siendo,

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

$$(29) \quad k_{A,t} = \frac{Y_{A,t}}{X} = \frac{S_B}{(1-u_1)(1-u_2)} + \\ + \frac{1-u_1-S_B}{(1-u_1)(u_1-u_2)} u_1^t - \frac{1-u_2-S_B}{(1-u_2)(u_1-u_2)} u_2^t$$

Utilizando (29), obtenemos el valor del multiplicador de una exportación autónoma de Argentina a Estados Unidos y de Argentina a Inglaterra luego de haber transcurrido t períodos, que en nuestro caso particular lo hacemos para $t = 1, 2, 3, \dots, 12, 15$ y 18 , siendo cada período igual a 4 meses.

Llevando los valores de Argentina con Estados Unidos del Cuadro N° 1, a la fórmula (29) resulta,

$$k_{A,t} = \frac{Y_{A,t}}{X} = \frac{0,39}{0,097381} - \frac{0,063}{0,041712} (0,763)^t - \\ - \frac{0,113}{0,072688} (0,587)^t \\ = 3,0649 - 1,5104 (0,763)^t - 1,5555 (0,587)^t$$

Dando a t valores de 1 a 12, 15 y 18 obtenemos el valor del multiplicador de una exportación autónoma de Argentina a Estados Unidos después de transcurridos dichos períodos, tal como se detallan en el Cuadro N° 2, junto al por ciento que representan del valor del multiplicador total o sea el que éste alcanza al cabo de un número infinito de períodos. Así para este caso, el 95.26 % del valor total del multiplicador se obtiene al cabo de 9 períodos o sea 3 años.

Para determinar el valor del multiplicador de una exportación autónoma de Argentina a Inglaterra, llevamos los valores respectivos del Cuadro N° 1 a (29),

$$k_{A,t} = \frac{Y_{A,t}}{X} = \frac{0,15}{0,042925} - \frac{0,065}{0,035700} (0,915)^t$$

$$= \frac{0,355}{0,212100} (0,495)^t$$

$$= 3,4945 - 1,8207 (0,915)^t - 1,6737 (0,495)^t$$

Los valores de $k_{a,t}$ para los mismos valores de t considerados en el caso anterior se dan en el Cuadro N° 3. Se observa que después de transcurridos 18 períodos, o sea 6 años, se alcanza el 89,47 % del valor del multiplicador total. Ello es debido a que u_1 tiene un valor próximo a la unidad, con lo cual sus potencias sucesivas tienden lentamente a cero.

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

CUADRO Nº 1

	Argentina con Estados Unidos	Argentina con Inglaterra
$b = c_A - s_A + c_B$	1,35	1,41
$\beta = c_B s_A + m_A m_B - c_A c_B$	-0,4478	-0,4529
$u_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4\beta}}{2}$	0,763	0,915
$u_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4\beta}}{2}$	0,587	0,495
$1 - u_1$	0,237	0,085
$1 - u_2$	0,413	0,505
$u_1 - u_2$	0,176	0,420
$1 - u_1 - s_B$	-0,063	-0,065
$1 - u_2 - s_B$	0,113	0,355
$(1 - u_1)(1 - u_2)$	0,097881	0,042925
$(1 - u_1)(u_1 - u_2)$	0,041712	0,035700
$(1 - u_2)(u_1 - u_2)$	0,072688	0,212100

CUADRO Nº 2
ARGENTINA CON ESTADOS UNIDOS

t	$u_1^t = 0,763^t$ (1)	$u_2^t = 0,587^t$ (2)	$-1,5104 x$ (1) (3)	$1,5555 x$ (2) (4)	$k_{A,t} = 3,0649 +$ $+ (3) - (4)$ (5)	$100 \frac{k_{A,t}}{k_{A,\infty}}$ (6)
1	0,763.000	0,587.000	- 1,152.435	0,913.078	0,999.387	32,61
2	0,582.169	0,344.569	- 0,879.308	0,535.977	1,649.615	
3	0,444.195	0,202.262	- 0,670.912	0,314.619	2,079.369	67,84
4	0,338.921	0,118.728	- 0,511.906	0,184.681	2,368.313	
5	0,258.597	0,069.693	- 0,390.585	0,108.407	2,565.908	
6	0,197.309	0,040.910	- 0,298.016	0,063.636	2,703.248	88,20
7	0,150.547	0,024.014	- 0,227.386	0,037.354	2,800.160	
8	0,114.867	0,014.096	- 0,173.495	0,021.926	2,869479	
9	0,087.643	0,008.274	- 0,132.376	0,012.870	2,919.654	95,26
10	0,066.872	0,004.857	- 0,101.003	0,007.555	2,956.342	
11	0,051.023	0,002.851	- 0,077.065	0,004.435	2,983.400	
12	0,038.931	0,001.674	- 0,058.801	0,002.604	3,003.495	98,00
15	0,017.293	0,000.339	- 0,026.119	0,000.527	3,038.254	99,13
18	0,007.681	0,000.068	- 0,011.601	0,000.106	3,053.193	99,62

CUADRO Nº 3
ARGENTINA CON INGLATERRA

t	$u_1^t = 0,915^t$ (1)	$u_2^t = 0,495^t$ (2)	$-1,8207 x (1)$ (3)	$1,6737 x (2)$ (4)	$k_{\Lambda,t} = 3,4945 +$ $+ (3) - (4)$ (5)	$100 \frac{k_{\Lambda,t}}{k_{\Lambda,\infty}}$ (6)
1	0,915.000	0,495.000	-1,665.940	0,828.481	1,000.079	28,62
2	0,837.225	0,245.025	-1,524.336	0,410.098	1,560.066	
3	0,766.061	0,121.287	-1,394.767	0,202.998	1,896.735	54,28
4	0,700.946	0,060.037	-1,276.212	0,100.484	2,117.804	
5	0,641.366	0,029.718	-1,167.735	0,049.739	2,277.026	
6	0,586.850	0,014.710	-1,068.478	0,024.620	2,401.402	68,72
7	0,536.968	0,007.282	-0,977.658	0,012.188	2,504.654	
8	0,491.325	0,003.605	-0,894.555	0,006.034	2,593.911	
9	0,449.562	0,001.784	-0,818.518	0,002.986	2,672.996	76,49
10	0,411.349	0,000.883	-0,748.963	0,001.478	2,744.059	
11	0,376.384	0,000.437	-0,685.282	0,000.731	2,808.487	
12	0,344.391	0,000.216	-0,627.033	0,000.362	2,867.105	82,05
15	0,263.825	0,000.026	-0,480.346	0,000.044	3,014.110	86,25
18	0,202.106	0,000.003	-0,367.974	0,000.005	3,126.521	89,47

CUADRO Nº 4

PARAMETROS (s/método de Haavelmo)	ARGENTINA (s/datos - Tabla Nº 3)	E.E. U.U. (s/datos Tabla Nº 4)	INGLATERRA (s/datos Tabla Nº 5)
$\sigma_Y^2 = \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum Y_t^2}{N} - \bar{Y}^2 \right)$	13.328,1556	41.269,6416	2.593,3518
$\sigma_C^2 = \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum C_t^2}{N} - \bar{C}^2 \right)$	8.664,3578	30.105,2796	1.417,4190
$\sigma_I^2 = \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum I_t^2}{N} - \bar{I}^2 \right)$	2.164,4228	2.092,8904	177,3232
$\mu_{11}(Y, C) = \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum C_t Y_t}{N} - \bar{C} \bar{Y} \right)$	9.914,3453	34.641,0204	1.916,7238
$\mu_{11}(Y, I) = \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum I_t Y_t}{N} - \bar{I} \bar{Y} \right)$	3.414,4103	6.628,6212	676,6280
$\mu_{11}(C, I) = \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum C_t I_t}{N} - \bar{C} \bar{I} \right)$	1.249,9875	4.535,7408	499,3040
$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\mu_{11}(C, Y)}{\sigma_I^2}$	0,57731	2,16722	2,8157
$\frac{1}{1-\alpha} = \frac{\mu_{11}(I, Y)}{\sigma_I^2}$	1,5773	3,16722	3,8157
$\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\sigma_I^2 \bar{C} - \mu_{11}(C, I) \bar{I}}{\sigma_I^2}$	2,353,59	906,9330	138,3921
$\alpha = \frac{\mu_{11}(C, I)}{\mu_{11}(Y, I)}$	0,36608	0,68426	0,7379
$\beta = \frac{\frac{\beta}{1-\alpha}}{1-\alpha}$	1499,10	288,3516	36,32

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

TABLA N° 1

ARGENTINA

(En millones de m\$_n)

AÑOS	BIENES DE CONSUMO IMPORTADOS			BIENES DE CONSUMO NACIONALES	CONSUMO DE B. NA- CIONALES per cápita
	CONSUMO GLOBAL a precios de 1950 (1)	A PRECIOS CORRIENTES (2)	A PRECIOS DE 1950 (3)		
50	48.282	2.077	2.077	46.205	2.688
1	49.776	4.017	2.940	46.836	2.656
2	46.919	3.753	2.327	44.682	2.477
3	50.348	2.454	1.382	48.966	2.661
4	50.761	3.081	1.605	49.156	2.621
5	54.599	3.455	1.610	52.989	2.771
6	54.566	7.115	2.675	51.891	2.662
7	54.929	10.714	3.257	51.667	2.601
8	56.476	11.404	2.577	53.899	2.661

TABLA Nº 2

ARGENTINA

(En millones de pesos, a precios de 1950)

(Per cápita)

AÑOS	INGRESO DESPLAZADO	CONSUMO DE BIENES NACIONALES C_t	$C_t Y_{t-1/3}$	$Y^2_{t-1/3}$
	$Y_{t-1/3} = \frac{2Y_t + Y_{t-1}}{3}$			
	(1)	(2)	(3)	(4)
1950	3.664	2.688	9.848.832	13.424.896
1	3.595	2.656	9.548.320	12.924.025
2	3.417	2.447	8.463.909	11.675.889
3	3.387	2.661	9.012.807	11.471.769
4	3.461	2.621	9.071.281	11.978.521
5	3.540	2.771	9.809.340	12.531.600
6	3.506	2.662	9.332.972	12.292.036
7	3.504	2.601	9.113.904	12.278.106
8	3.532	2.661	9.398.652	12.475.024
Suma	31.606	23.798	83.600.017	111.051.776
Promedio	3.512	2.644	9.288.890	12.339.086
$\overline{Y^2} =$	12.334.144		$\overline{CY} =$	9.285.728

TABLA Nº 3
ARGENTINA

PER CAPITA (en m\$ _n . de 1950)											
AÑOS	INGRESO	CONSUMO	INVERSIÓN	Y ² _t	C ² _t	I ² _t	C _t Y _t	I _t Y _t	C _t I _t		
	Y _t	C _t	I _t							(1)	(2)
1949	3.750	2.968	782	14.062.500	8.809.024	611.524	11.130.000	2.932.500	2.320.976		
50	3.621	2.809	812	13.111.641	7.890.481	659.344	10.171.389	2.940.252	2.280.908		
1	3.632	2.823	809	13.191.424	7.969.329	654.481	10.253.136	2.938.288	2.283.807		
2	3.310	2.601	709	10.956.100	6.765.201	502.681	6.609.310	2.346.790	1.844.109		
3	3.426	2.736	690	11.737.476	7.485.696	476.100	9.373.536	2.363.940	1.887.840		
4	3.478	2.706	772	12.096.484	7.322.426	595.984	9.411.468	2.685.016	2.089.032		
5	3.571	2.855	716	12.752.041	8.151.025	512.656	10.195.205	2.556.836	2.044.180		
6	3.473	2.799	674	12.061.729	7.834.401	454.276	9.720.927	2.340.802	1.886.526		
7	3.519	2.764	755	12.383.361	7.639.696	570.025	9.726.516	2.656.845	2.086.820		
8	3.538	2.788	750	12.517.444	7.772.944	562.500	9.863.944	2.653.500	2.091.000		
Suma	35.318	27.849	7.469	124.870.200	77.640.233	5.599.571	98.455.431	26.414.769	20.815.198		
Promedio	3.532	2.785	747	12.487.020	7.764.023	559.957	9.845.543	2.641.477	2.081.520		
	$\overline{Y^2} =$	$\overline{C^2} =$	$\overline{I^2} =$				$\overline{CY^2} =$	$\overline{IY^2} =$	$\overline{CI^2} =$		
	12.475.024	7.756.225	558.009				9.836.620	2.638.404	2.080.395		

TABLA N° 4
ESTADOS UNIDOS
(en dólares)

AÑOS	PER CAPITA								
	INGRESO Y_t (1)	CONSUMO C_t (2)	INVERSIÓN I_t (3)	Y_t^2 (4)	C_t^2 (5)	I_t^2 (6)	$C_t Y_t$ (7)	$I_t Y_t$ (8)	$C_t I_t$ (9)
1950	1.876	1.499	377	3.519.376	2.247.001	142.129	2.812.124	707.252	565.123
1	2.131	1.699	432	4.541.161	2.886.601	186.624	3.620.569	920.592	733.968
2	2.210	1.824	386	4.884.100	3.326.976	148.996	4.031.040	853.060	704.064
3	2.289	1.892	397	5.239.521	3.579.664	157.609	4.031.040	853.060	704.064
4	2.236	1.859	377	4.999.696	3.455.881	142.129	4.156.724	842.972	700.843
5	2.405	1.936	469	5.784.025	3.748.096	219.961	4.656.080	1.127.945	907.984
6	2.493	1.999	494	6.215.049	3.996.001	244.036	4.983.507	1.231.542	987.506
Suma	15.640	12.708	2.932	35.182.928	23.240.220	1.241.484	28.590.832	6.592.096	5.350.612
Promedio	2.234	1.815	419	5.026.132	3.320.031	177.355	4.084.404	941.728	764.373
	$\overline{Y^2} =$	$\overline{C^2} =$	$\overline{I^2} =$				$\overline{CY^2} =$	$\overline{IY^2} =$	$\overline{CI^2} =$
	4.990.756	3.294.225	175.561				4.054.710	936.046	760.485

TABLA Nº 5
INGLATERRA
(en £)

AÑOS	PER CAPITA			Y_t^2 (4)	C_t^2 (5)	I_t^2 (6)	$C_t Y_t$ (7)	$I_t Y_t$ (8)	$C_t I_t$ (9)
	INGRESO Y_t (1)	CONSUMO C_t (2)	INVERSIÓN I_t (3)						
1950	263	227	36	69.169	51.529	1.296	59.701	9.468	8.172
1	291	250	41	84.681	62.500	1.681	72.750	11.931	10.250
2	314	269	45	98.596	72.361	2.025	84.466	14.130	12.105
3	333	285	48	110.889	81.225	2.304	94.905	15.984	13.680
4	353	299	54	124.609	89.401	2.916	105.547	19.062	16.146
5	375	314	61	140.625	98.596	3.721	117.750	22.875	19.154
6	404	331	73	163.216	109.561	5.329	133.724	29.492	24.163
Suma	2.333	1.975	358	791.785	565.173	19.272	668.843	122.942	103.670
Promedio	333	282	51	113.112	80.739	2.753	95.549	17.563	14.810
	$\overline{Y^2} =$	$\overline{C^2} =$	$\overline{I^2} =$				$\overline{CY^2} =$	$\overline{IY^2} =$	$\overline{CI^2} =$
	110.889	79.524	2.601				93.906	16.983	14.382

TABLA Nº 6
ARGENTINA

(En millones de pesos a precios de 1950)

AÑOS INGRESO DESPLAZADO $Y_{t-1/3} = \frac{2Y_t + Y_{t-1}}{3}$	C.I.F. IMPORTACION GLOBAL M_t	$M_t Y_{t-1/3}$	$Y^2_{t-1/3}$	
(1)	(2)	(3)	(4)	
1950	65.418	4.881	300.917.178	3.806.006.724
1	63.447	7.690	487.898.960	4.028.521.309
2	61.189	6.983	386.756.897	3.740.488.931
3	61.980	5.191	321.738.180	3.835.077.184
4	64.405	3.707	237.739.335	4.150.808.045
5	67.870	4.150	279.170.800	4.585.388.900
6	67.809	6.864	666.088.736	4.510.574.231
7	68.100	9.595	849.667.740	4.788.978.400
8	71.000	7.000	801.470.718	5.068.650.784
Suma	588.818	52.688	3.486.154.342	38.630.684.248
Promedio	65.431	5.854	387.350.482	4.292.298.249
$\overline{Y^2} = 4.281.215.761$		$\overline{MY} = 383.033.074$		

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

TABLA Nº 7

ESTADOS UNIDOS

(En millones de dólares)

AÑOS	INGRESO DESPLAZADO $\frac{2Y_t + Y_{t-1}}{3}$ (1)	C.I.F. IMPORTACION GLOBAL M_t (2)	$M_t Y_{t-1/3}$ (3)	$Y_{t-1/3}^2$ (4)
1950	275.500	9.601	2.645.075.500	75.900.250.000
51	314.200	11.882	3.333.324.400	98.721.640.000
52	341.000	11.662	3.976.742.000	116.291.000.000
53	359.267	11.792	4.236.476.464	129.072.777.209
54	363.867	11.047	4.019.638.749	132.399.193.689
55	386.033	12.358	4.770.595.814	149.021.477.089
56	411.967	13.798	5.684.320.666	169.716.809.089
Suma	2.451.834	82.140	29.066.173.593	871.113.147.156
Promed.	350.262	11.734	4.152.310.512	124.444.735.308
	$\overline{Y^2} = 122.663.468.644$		$\overline{MY} = 4.109.974.308$	

TABLA Nº 8

INGLATERRA
(Millones de £)

ANOS	INGRESO DESPLAZADO $\frac{2Y_t + Y_{t-1}}{3}$ $Y_{t-1/3}$	C.I.F. IMPORTACION GLOBAL M_t	$M_t Y_{t-1/3}$	$Y_{t-1/3}^2$
	(1)	(2)	(3)	(4)
1950	13.027	2.557	33.310.039	169.702.729
51	14.180	3.827	54.266.860	201.072.400
52	15.453	3.408	52.663.824	238.795.209
53	16.533	3.276	54.162.108	273.340.089
54	17.583	3.306	58.129.398	309.161.889
55	18.713	3.803	71.165.539	350.176.369
56	20.147	3.808	76.719.776	405.901.609
Suma	115.636	23.985	400.417.544	1.948.290.294
Promedio	16.519	3.426	57.202.506	278.307.182
	$\overline{Y^2} = 272.877.361$		$\overline{MY} = 56.594.094$	

LA TEORÍA DEL MULTIPLICADOR

TABLA Nº 9
PROPENSIONES MARGINALES

PAIS	PROPENSIONES MARGINALES A:			Suma	Período
	CONSUMIR	IMPOTAR	AHORRAR		
	c	m	s		
ARGENTINA	0,64	0,39	— 0,03	1	1950-58
ESTADOS UNIDOS	0,68	0,02	0,30	1	1950-56
INGLATERRA	0,74	0,11	0,15	1	1950-56

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ALLEN, R. G. D.: *Mathematical Economics*, Macmillan & Co. London, 1956.
- BAUMOL, William: *Economic Dynamic - An Introduction*. The Macmillan Co. Nueva York, 2da. Edición, 1959.
- BREMS, Hans: *Output, Employment Capital and Growth*. Harper and Brothers. Nueva York, 1959.
- BRESCIANI-TURONI, C.: *The multiplier in practice*, Review of Economic and Statistic, mayo 1938.
- CHABERT, Alexandre: *Structure Economique et Theorie Monetaire*. Libraire Armand Colin, Paris, 1956.
- CHIPMAN, John, S.: *The Generalized Bi-System Multiplier*, Canadian Journal of Economics and Political Science, mayo 1949.
- CLARK, Colin: *Determination of the Multiplier from National Income Statistics*, Economic Journal, 1938.
- CLARK, J. M.: *Cumulative Effects of Changes in Aggregate Spending as Illustrated by Public Works*, American Economic Review, 1935.
- DI FENIZIO, Ferdinando: *Economía Política*, ed. Bosch, Barcelona, 1955.
- FURTADO, CELSO: *El desequilibrio externo en las economías subdesarrolladas*, El Trimestre Económico, Méjico, abril-junio 1958.
- GOODWIN, Richard: *El Multiplicador*, La Nueva Ciencia Económica. Revista de Occidente, Madrid, 1955.
- GUITON, Henri: *Les fluctuations économiques*, Sirey, Paris 1951.
- HANSEN, Alvin: *Política Fiscal y Ciclos Económicos*. Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1945.
- HANSEN, Alvin: *Guía de Keynes*. Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1957.
- HICKS, J. R.: *Una aportación a la Teoría del Ciclo*. Aguilar, Madrid, 1954.
- HOOD and KOOPMANS: *Studies in Econometric Methods*. John Wiley and Sons. Nueva York, 1953.
- JAMES, Emile: *Historia del Pensamiento Económico en el Siglo XX*. Fondo de Cultura Económica - Méjico 1957.

REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA

- LANGE, Oscar: On The Theory of the Multiplier, Rev. Econométrica, vol. II.
- MACHLUP, Fritz: International Trade and the National Income Multiplier. The Blakiston Co. Filadelfia, 1943.
- MARSH, Donald: Comercio Mundial e Inversión Internacional, Aguilar, 1951.
- METZLER, L.: The Transfer Problem Reconsidered, Rev. Journal of Political Economic, junio 1942.
- NURKSE, Ragnar: Equilibrio interno e internacional, La Nueva Ciencia Económica, Rev. de Occidente, Madrid, 1955.
- ROSTOW, W.: The Stages of the Economics Growth, Cambridge University Press, 1960.
- SAMUELSON, Paul: Interrelaciones entre el Análisis del Multiplicador y el Principio de Aceleración, en Ensayos sobre el ciclo económico, seleccionados por G. Haberler. Fondo de Cultura Económica, México, 1946.
- SAMUELSON, Paul: Fiscal Policy and Income Determination, Quarterly Journal of Economics, vol. 56.
- SAMUELSON, Paul: A Fundamental Multiplier Identity, Econometrica, Vol. II.
- SUNKEL, Osvaldo: ¿Cuál es la utilidad práctica del Multiplicador? El Trimestre Económico, Méjico, 1957.
- TORRES, Manuel: Teoría General del Multiplicador, Instituto de Economía Sancho de Moncada, Madrid, 1943.
- VISINE, Francois: La transmission des Fluctuations Economiques par le Commerce Exterieur. Libraire Armand Colin, Paris, 1953.
- WIONCZEC, Miguel: El Financiamiento de la Integración Económica de América Latina, El Trimestre Económico, Méjico, enero-marzo, 1960.
- WRIGHT, A. LL.: The Genesis of the Multiplier Theory, Oxford Economics Papers, Nueva Serie N° 2, junio 1956.
- ZAMORA, Francisco: Introducción a la Dinámica Económica. Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1958.
- BANCO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA: Memoria y Balance General del año 1959.
- DIRECCIÓN NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y CENSOS: Boletín Mensual de Estadística de la República Argentina, julio de 1959, Bs. Aires.
- DIRECCIÓN NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y CENSOS: Comercio Exterior 1958.
- NACIONES UNIDAS: Demographic Yearbook, 1958.
- NACIONES UNIDAS: International Financial Statistics, setiembre, 1959.
- NACIONES UNIDAS: Statistical Yearbook, 1958.
- NACIONES UNIDAS: Yearbook of National Accounts Statistics, 1957.