



ARTÍCULOS

## **Influencia del coeficiente de capital sobre el ingreso nacional real por cabeza**

Maurice Allais

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 10, No. 3-4 (1966): 3° y 4° Trimestre, pp. 7-110.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3608>



La Revista de Economía y Estadística, se edita desde el año 1939. Es una publicación semestral del Instituto de Economía y Finanzas (IEF), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Valparaíso s/n, Ciudad Universitaria. X5000HRV, Córdoba, Argentina.

Teléfono: 00 - 54 - 351 - 4437300 interno 253.

Contacto: [rev\\_eco\\_estad@eco.unc.edu.ar](mailto:rev_eco_estad@eco.unc.edu.ar)

Dirección web <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/index>

### Cómo citar este documento:

Allais, M. (1966). Influencia del coeficiente de capital sobre el ingreso nacional real por cabeza. *Revista de Economía y Estadística*, Tercera Época, Vol. 10, No. 3-4 (1966): 3° y 4° Trimestre, pp. 7-110.

Disponible en: [<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3608>](http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3608)

El Portal de Revistas de la Universidad Nacional de Córdoba es un espacio destinado a la difusión de las investigaciones realizadas por los miembros de la Universidad y a los contenidos académicos y culturales desarrollados en las revistas electrónicas de la Universidad Nacional de Córdoba. Considerando que la Ciencia es un recurso público, es que la Universidad ofrece a toda la comunidad, el acceso libre de su producción científica, académica y cultural.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/index>

ARTICULOS

# INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL SOBRE EL INGRESO NACIONAL REAL POR CABEZA (\*)

MAURICE ALLAIS

Escuela Nacional Superior de Minería de París  
Instituto de Estadística de la Universidad de París

## SUMARIO

### I. GENERALIDADES

- Distribución del trabajo disponible entre trabajo directo y trabajo indirecto.
- Caso de una economía de régimen permanente.
- Objeto de este trabajo.

### II. TEORIA GENERAL DEL CAPITAL OPTIMO

- Diagrama característico de la producción disponible en el momento  $t$ .
- Ejemplo de diagrama característico en un caso simple.
- Período medio de producción.
- Expresión matemática del Ingreso y del Capital Nacional productible.
- Diagrama característico de amortización del ingreso originario.
- Análisis simplificado por períodos.
- Condiciones del óptimo de gestión.
- Condiciones para la capitalización óptima.
- Caso general.
- Fórmulas de primera aproximación.

### III. MODELO EXPLICATIVO DE LA TEORIA GENERAL

#### 1) *Las hipótesis del modelo*

- a) Hipótesis (a): Linealidad logarítmica de la función global de producción.

(\*) Traducido del original francés por el Profesor Cont. Aldo de Gracia.

b) Hipótesis (b): Decrecimiento exponencial de la función característica  $\varphi(\beta, i)$  con el tiempo (ley de amortización exponencial)

2) *Consecuencias de las hipótesis*

- A) Consecuencias de la hipótesis (b).
- B) Consecuencias de las hipótesis (a) y (b).

3) *Interpretación de las consecuencias*

- a) Existencia de un máximo para el ingreso nacional real.
- b) Variación de  $\theta$  y de  $\bar{R}$  con  $i$ .
- c) Constancia del valor salarial del capital productible.
- d) Expresión del capital productible real.
- e) Beneficio susceptible de obtenerse por aumento del coeficiente de capital.
- f) Expresión de la productividad.
- g) Hipótesis de decrecimiento exponencial de las elasticidades de producción.
- h) Existencia de un máximo finito para el ingreso nacional real.
- i) Significado del coeficiente  $\theta_0$ .
- j) La tasación de los ingresos originarios.
- k) Comportamiento de los ahorristas.
- l) Extensión a un régimen evolutivo.
- m) Verificación de los resultados de la teoría general.

IV. CASO EN QUE LA FUNCION GLOBAL DE PRODUCCION ES HOMOGÉNEA

Hipótesis (c): Homogeneidad de orden uno de la función global de producción con respecto a los logaritmos.

V. CONFRONTACION DEL MODELO CON LOS DATOS ESTADISTICOS

- a) Ley de linealidad logarítmica de la función de producción.
- b) Ley de amortización exponencial.
- c) Estimación del coeficiente  $k$ .
- d) Estimación de  $i$ .
- e) Estimación de  $C$ ,  $R$  y  $C/R$ .
- f) Estimación directa de  $\theta_0$ .
- g) Constancia de la relación  $C/R_0$ .
- h) Confrontación del modelo con los trabajos de Douglas.
- i) Período medio  $\theta$  y duración media de vida  $T$  de los bienes durables.
  - Estimación de  $T$ .
  - Estimación de  $\lambda$ .
  - Estimación de  $\theta$ .

## INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

- j) Estimación del número de años al cabo de los cuales los servicios que contribuyen a la producción de bienes no durables quedan prácticamente amortizados.
- k) Proporción del ingreso originario utilizado en el ingreso nacional del año.
  - l) Correlación entre  $\bar{R}$  y  $\Theta$ .
  - m) Correlación entre  $i$  y  $\Theta$ .
  - n) Proporción de las rentas de bienes raíces dentro del ingreso originario.

### VI. JUSTIFICACION GENERAL DEL MODELO

- 1) Justificación del modelo por sus hipótesis.
- 2) Justificación del modelo por sus consecuencias.

### VII. APLICACIONES

- a) Posibilidad de incrementar el ingreso nacional real por cabeza, por aumento en la intensidad de acumulación de capital.  
—Significado de los resultados obtenidos.
- b) Política de desarrollo de capital.
- c) Progreso de una economía subdesarrollada, en el caso en que la inversión neta sea un porcentaje constante del ingreso nacional.

## ANEXOS

### ANEXOS A

- A I. Coeficiente de capital en los Estados Unidos (1880-1956).
- A II. Datos sobre la estructura del capital en los Estados Unidos de 1880 a 1956.
- A III. Composición del capital en los Estados Unidos en 1956 (en miles de millones de dólares).
- A IV. Valor del coeficiente de capital en 1913 para los Estados Unidos, Francia y Gran Bretaña.
- A V. Coeficientes de capital para distintos países y diferentes épocas.

### ANEXOS B

- B I. Eficacia marginal  $i$  del capital en función del período de producción  $\Theta = C/R$  ( $-5\% < i < 15\%$ ).
- B II. Eficacia marginal  $i$  del capital en función del período de producción  $\Theta = C/R$  ( $0 < i < 200\%$ ).
- B III. Ingreso real por cabeza  $\bar{R}/\bar{R}_M$  en función del período de producción  $\Theta = C/R$  en el caso de una función homogénea de producción.

- B IV. Ingreso real por cabeza  $\bar{R}/\bar{R}_M$  en función de la tasa de interés  $i$ .
- B V. Incremento relativo máximo del ingreso real que puede obtenerse llevando el período de producción de  $\theta$  a  $\theta_0$ .
- B VI. Incremento relativo máximo del ingreso real que puede alcanzarse cuando la tasa de interés pasa del valor  $i$  al valor cero de la eficacia marginal de capital.
- B VII. Progreso capitalístico obtenido por la realización de una inversión anual neta igual a un porcentaje constante del ingreso nacional.  
(Caso en que  $\gamma = 10\%$ ).
- B VIII. Progreso capitalístico que se obtiene cuando la inversión neta anual es un porcentaje constante del ingreso nacional.  
(Caso en que  $\gamma = 15\%$ ).
- B IX. Progreso capitalístico que se obtiene cuando la inversión neta anual es un porcentaje constante del ingreso nacional.

## I. GENERALIDADES

### LA DISTRIBUCIÓN DEL TRABAJO DISPONIBLE ENTRE TRABAJO DIRECTO Y TRABAJO INDIRECTO

1. En toda economía, en un instante dado, se hallan disponibles —por unidad de tiempo— cierta cantidad de trabajo, cierta cantidad de riquezas naturales, cierta cantidad de capitales productibles resultante de los esfuerzos de ahorro que se realizaron en el pasado.

Para conocimientos tecnológicos dados, la teoría del rendimiento social estudia las condiciones en que puede hacerse el mejor uso de estos recursos (asignación óptima de recursos u *optimum* de gestión) <sup>(1)</sup>.

*Si el optimum de gestión es un hecho*, se puede investigar entonces cuál es la influencia del volumen global de capital de que dispone la economía considerada, sobre el ingreso nacional real.

Si este capital fuese gratuito, si proviniese por ejemplo de una contribución exterior (Plan Marshall, *verbigracia*), el ingreso nacional real sería una función monótona creciente del capital real disponible.

Pero si el capital disponible proviene de un esfuerzo, interno y anterior, de ahorro, las cosas suceden de manera diferente. Puesto que todo capital productible se deteriora con el correr del tiempo, es preciso renovarlo y se advierte aquí una cuestión esencial. Desde que se utiliza un equipo que requiere el empleo de un cierto ahorro, se puede aumentar el rendimiento del trabajo *directo* consagrado a cierta producción, pero, por otra parte, la producción de este equi-

---

(1) Ver mi "Tratado de Economía Pura", París 1954 (1ª edición 1943), Capítulo IV E, pp. 604-694; mi obra "Economía e Interés", Imprenta Nacional, París 1947 (Librería Médicis) Cap. VI, pp. 153-178; y, por último, mi pequeño trabajo "Economía Pura y Rendimiento Social", Sirey, París 1945.

po exige trabajo *indirecto*, y se concibe entonces, que el uso del equipo considerado no sea ventajoso más que en la medida en que cuanto se gane en trabajo *directo* compense o supere a lo que se pierda en trabajo *indirecto*. Se concibe igualmente, que pueda existir una *cantidad óptima de capital* (óptimum de capitalización).

#### CASO DE UNA ECONOMIA DE RÉGIMEN PERMANENTE

2. El modelo más simple que se puede estudiar es el de una economía de régimen permanente, que disponga cada año de una determinada cantidad de trabajo. Una parte de este trabajo estará directamente dedicada a la producción de bienes de consumo, y otra a la producción de bienes de capital. A cada distribución del trabajo disponible entre trabajo directo y trabajo indirecto, corresponderá un capital productible ahorrado  $C$ , una tasa de interés  $i$  y un ingreso nacional  $R$ .

Cuanto mayor sea el coeficiente de capital  $\gamma = \frac{R}{C}$ , tanto mayor será el ahorro relativamente acumulado al ingreso y tanto menor será la tasa del interés.

*Si suponemos que para cada valor del coeficiente  $\gamma$  el rendimiento social es máximo (lo que, en particular, implica que el capital disponible sea utilizado de la mejor manera), y es ésta una condición fundamental, entonces el ingreso real resulta una función bien determinada del coeficiente  $\gamma$ ; podemos pues proponernos estudiar las variaciones del ingreso en función del coeficiente de capitalización (2).*

#### OBJETO DE ESTE TRABAJO

3. El presente trabajo procura presentar, dentro del cuadro de la teoría general expuesta en 1947 en mi obra "Economía e Interés", Cap. VII, un modelo econométrico que explique la relación existente entre el ingreso real y el coeficiente  $\gamma$ . Este modelo,

(2) Ver mi trabajo "Economía e Interés", Cap. VII pp. 179-186.



por un lado, explica, notablemente la teoría general, y, por otra parte, parece compatible con todos los datos de naturaleza estadística de que nosotros disponemos (3).

Este modelo permite, además, esclarecer algunos aspectos particularmente importantes de la teoría del capital.

Así el modelo posibilita, muy especialmente, dar respuesta a las dos siguientes cuestiones:

a) ¿Qué crecimiento del ingreso real podríamos obtener a partir de un incremento de capital? ¿Cuál es la naturaleza de la dependencia del ingreso nacional real, con respecto a los procesos subsidiarios de producción?

b) ¿Qué relación existe entre el valor salarial del capital productible (4) y el valor del capital calculado en cantidades físicas? En el caso, por ejemplo, de los Estados Unidos y de Francia, ¿la mayor cantidad física de equipo disponible por obrero en los Estados Unidos debe ser considerada como causa de la mayor productividad americana, o más bien como un simple efecto? (5).

Hasta aquí, la casi totalidad de los autores (Douglas, Colin Clark, etc.) han estudiado la relación existente entre la producción bruta, por una parte, y el trabajo y el capital, por la otra. *Estos trabajos no tienen en cuenta la amortización del capital que es necesario deducir de la producción bruta para obtener la producción neta, única que verdaderamente interesa desde el punto de vista económico* (6). En principio, estos estudios se han limitado a la industria. Este trabajo, por el contrario, considera el conjunto de la

(3) Los principios de este modelo fueron presentados por primera vez en 1955 en el Congreso de Economistas de lengua francesa. (Travaux du Congrès, Ediciones Domat-Montchrestien, París 1956, pp. 188 a 223. Desgraciadamente las fórmulas del texto contienen numerosos errores).

(4) Cociente que resulta de dividir el valor nominal del capital por el total nominal del salario básico por hora.

(5) Ver mi trabajo "L'Europe Unie, Route de la Prospérité", Calmain Lévy, 1960, Primera Parte. La respuesta al problema planteado es fundamental, desde que se trata de examinar cuál es la influencia de la estructura capitalista en la productividad media más elevada de los EE. UU.

(6) En particular, fórmulas como las de Douglas (parágrafo 44, más adelante) sugieren la idea de que se puede aumentar indefinidamente la producción incrementando el capital utilizado. Es ésta, como veremos, una conclusión inexacta (parágrafo 23).

actividad económica y estudia la dependencia del ingreso nacional real con respecto al capital real utilizado. Cualquiera sea el valor que el lector atribuya al modelo que proponemos, nos parece que no puede negársele una ventaja: provocar la reflexión a propósito de gran número de aspectos que hasta ahora creemos han sido considerados de una manera insuficiente.

## II. TEORIA GENERAL DEL OPTIMUN DE CAPITALIZACION

He formulado, en mi obra "Economie et Intérêt", una teoría general de la influencia ejercida por el volumen de ahorro sobre el ingreso nacional real, de la que simplemente recordaré aquí los principios esenciales:

### DIAGRAMA CARACTERÍSTICO DE LA PRODUCCIÓN DISPONIBLE EN EL MOMENTO $t$

4. Es posible, por lo pronto, representar mediante un diagrama muy sencillo el conjunto de procesos subsidiarios de producción, en una economía de régimen permanente.

Supongamos, por ejemplo, que en la actualidad afectamos trabajo a la construcción de un alto horno. Este alto horno producirá fundición. A partir del hierro fundido se obtendrá acero. El acero se enviará a las industrias de transformación y, finalmente, será posible, con él, fabricar cacerolas que los consumidores podrán adquirir para su uso personal.

El gasto en salarios originado en la construcción del alto horno quedará, en último análisis, incorporado en parte al precio de venta de la cacerola. Dicho gasto se reflejará entonces, con cierto rezago, en el ingreso nacional ulterior.

Se observa así que en el ingreso nacional disponible en un momento dado, figuran gastos en salarios que se han hecho con anterioridad, y se puede considerar —al menos teóricamente— una curva que proporcione la desviación media en el tiempo de los gastos anteriores (en trabajo y en servicios inmobiliarios) que aparecen en el ingreso nacional de un momento determinado  $t$ . Daremos a

esta curva el nombre de “*curva característica*” de los procesos subsidiarios de producción.

Supongamos ahora, una economía de régimen permanente, hipótesis que se verifica *en primera aproximación* en una economía real cuando hay estabilidad monetaria, *es decir cuando el salario básico permanece más o menos constante*; designemos con  $R_0$  la remuneración global, por unidad de tiempo, de los servicios del trabajo y de las riquezas naturales.  $R_0$  *representa el valor global de los salarios y de las rentas inmobiliarias*, es decir el valor global de los factores primarios de la producción. Llamaré “*Ingreso originario*” a  $R_0$ .

Tratándose de una economía de régimen permanente, la curva característica queda perfectamente determinada cuando se da la tasa  $i$  del interés.

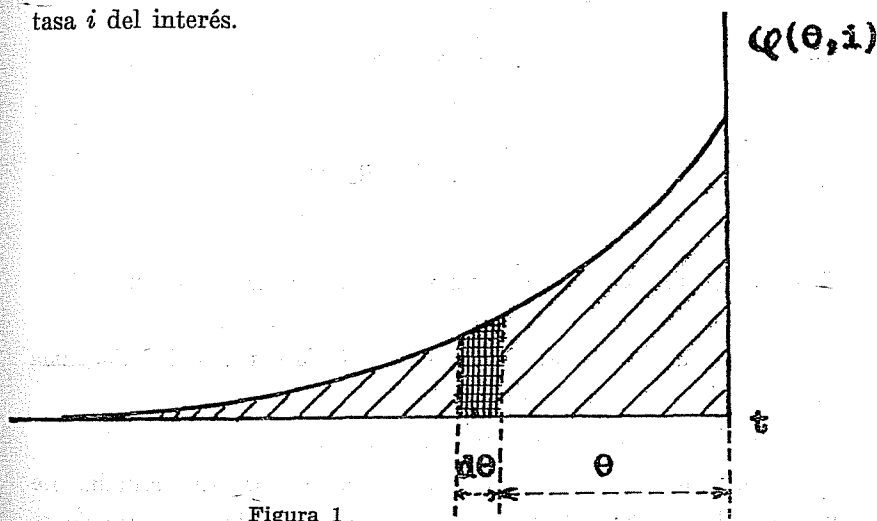


Figura 1

Podemos expresar por

$$(1) \quad \tau_\theta = R_0 \varphi(\theta, i)$$

los gastos en factores primarios, por unidad de tiempo, que aparecerán  $-\theta$  unidades de tiempo más tarde— en el ingreso nacional del momento  $t$ .

La cantidad  $R_0 \varphi(\theta, i) d\theta$  está representada en la Figura (1)

por valor unitario de  $R_w$ , aproximadamente por la pequeña superficie doblemente rayada correspondiente a los gastos efectuados entre el momento  $[t - (\theta + d\theta)]$  y el momento  $[t - \theta]$  que aparecerán en el ingreso nacional del momento  $t$ .

El área con rayado simple, limitada por la curva característica y los ejes, es exactamente el cociente que resulta de dividir por  $R_w$  el valor del ingreso nacional en el momento  $t$ , una vez deducidos los intereses que corresponden a las sumas gastadas en las distintas y sucesivas épocas. Tal área es, por tanto, igual a la unidad.

Se tiene así:

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \varphi(\theta, i) d\theta = 1$$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} r_\theta d\theta = R_w \quad (7)$$

#### EJEMPLO DE DIAGRAMA CARACTERÍSTICO PARA UN CASO SIMPLE

5. Se puede ilustrar con sencillez el significado del diagrama característico en un caso simple.

Imaginemos tres pescadores en una isla.

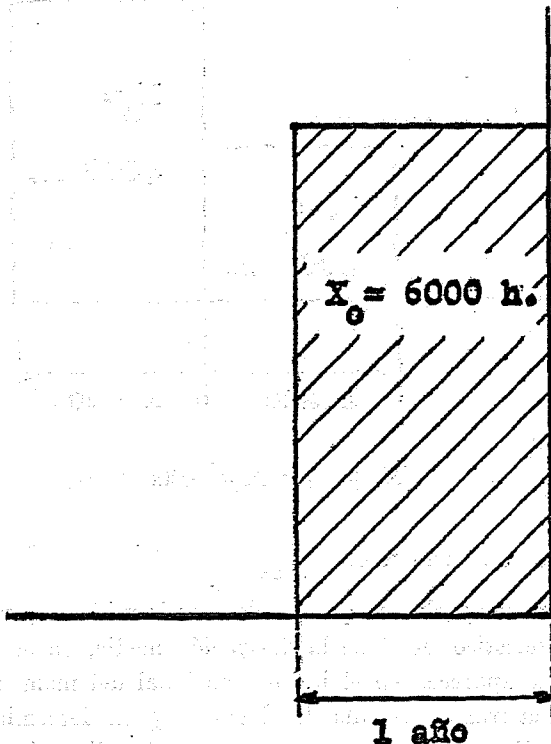
Admitamos, para un primer caso, que ellos pescan manualmente y que trabajan 2000 horas por año. Todo el trabajo producido es trabajo *directo*.

---

(7) El diagrama característico fue utilizado, por primera vez, por JEVONS en un caso muy simplificado (*Théorie de l'Economie Politique*, Giard 1900, Cap. VII, pp. 316 a 326). Este mismo caso fue retomado por BOUSQUET quién lo analizó de manera mucho más precisa (*Instituts de Science Economique*, T. III, Rivière 1936, pp. 157 a 169). (Sobre este tema, ver mi trabajo "Economie et Intérêt", p. 140).

## INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

El diagrama característico está constituido por un rectángulo de superficie equivalente a 6.000 horas.

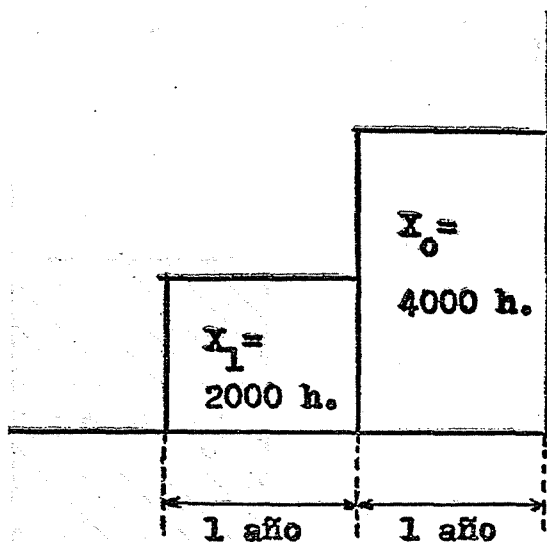


Se tiene:

$$(4) \quad X_0 = X = 6.000 \text{ horas,}$$

en donde  $X$  representa la cantidad total de trabajo disponible cada año.

En un segundo caso, supongamos que un pescador fabrica cada año una red que, en el año siguiente, es empleada por los otros dos pescadores. En este caso, el diagrama característico se presenta como sigue:



Se tiene:

$$(5) \quad X_0 + X_1 = X = 6.000 \text{ horas}$$

#### PERÍODO MEDIO DE PRODUCCIÓN

6. El primer problema que puede ser discutido a través del diagrama característico, es el de la desviación media, en el tiempo, de los gastos que aparecen en el ingreso nacional del momento  $t$ .

Para cada tramo hay una desviación  $\theta$  y un determinado gasto  $R_{\theta, \varphi}(\theta, i) d\theta$ . Es posible entonces calcular la media aritmética ponderada de las desviaciones  $\theta$ :

$$(6) \quad \theta := \frac{\int_0^{+\infty} \theta \varphi(\theta, i) d\theta}{\int_0^{\infty} \varphi(\theta, i) d\theta}$$

Llamaremos a esta media, "período medio de producción". Cuanto más baja sea la tasa del interés, tantos más procesos subsi-

diarios de producción existirán, lo cual implica que la curva característica sea más aplanada y que  $\theta$  sea mayor

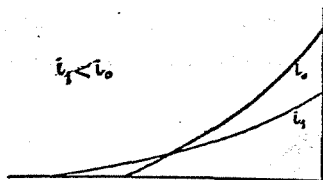


Figura 2

EXPRESIÓN MATEMÁTICA DEL INGRESO Y DEL CAPITAL NACIONAL PRODUCTIBLE

7. Si expresamos por  $R$  el valor nominal del ingreso nacional y por  $C$  el valor global de los equipos, es decir el valor del capital nacional productible (<sup>8</sup>), se tiene:

$$(7) \quad R = R_0 \int_0^{+\infty} e^{i\theta} \varphi(\theta, i) d\theta$$

en donde  $i$  es la tasa del interés. Como es, además,

$$(8) \quad R = R_0 + iC$$

se deduce

$$(9) \quad C = R_0 \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\theta} - 1}{i} \varphi(\theta, i) d\theta$$

En el ejemplo de los tres pescadores considerado más arriba, resulta

$$(10) \quad R = X_0 + (1 + I) X_1$$

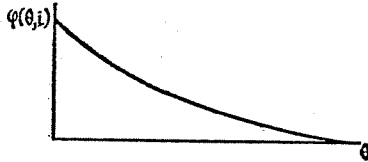
en donde  $I$  es la tasa anual de interés (<sup>9</sup>).

(8) Esto es, el valor del capital nacional  $C_x$ , una vez que se ha deducido el valor  $C_\varphi$  de la tierra (ver más adelante, § 50).

(9) Por supuesto que es  $1 + I = e^i$ .

DIAGRAMA CARACTERÍSTICO DE AMORTIZACIÓN DEL INGRESO ORIGINARIO

8. En el caso de régimen permanente, se observa de inmediato que la función  $R_{\omega\varphi}(\theta, i)$  representa, igualmente, la función de amortización del ingreso originario, en un momento dado.



En efecto, la fracción  $R_{\omega\varphi}(\theta, i)$  del ingreso originario en el momento  $t$ , aparece en el ingreso disponible del período  $(t + \theta, t + \theta + d\theta)$  <sup>(10)</sup>.

En un período dado, el ingreso nacional originario total amortizado es igual a  $R_{\omega}d\theta$  <sup>(11)</sup>.

ANÁLISIS SIMPLIFICADO POR PERÍODOS

9. Designemos por  $\bar{R}$  el valor —expresado mediante una unidad conveniente— del ingreso nacional real <sup>(12)</sup>.

Para simplificar, consideremos los períodos sucesivos  $T_0, T_1, T_2, \dots$ , por ejemplo años. Supongamos que el ingreso nacional originario está constituido únicamente por salarios, que no hay más que una sola calidad de trabajo, que  $X$  representa la cantidad anual de trabajo y que  $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$  son las cantidades de trabajo que contribuyen a la producción en el momento  $t$ .

Se tiene

$$(11) \quad \bar{R} = f(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$$

(10) Ver mi trabajo "Economie et Intérêt", p. 122.

(11) Esta circunstancia resulta de las relaciones (1) y (2) y es independiente de la ley de amortización.

(12)  $\bar{R}$  es un índice del volumen físico del ingreso nacional.



y naturalmente,

$$(12) \quad \bar{R} = rR = xX_0 + (1+I)xX_1 + \dots + (1+I)^n xX_n + \dots,$$

en donde  $x$  representa el salario unitario,  $I$  la tasa anual de interés y  $r$  el precio de cada unidad de  $\bar{R}$ .

#### CONDICIONES DEL OPTIMUN DE GESTIÓN

10. *El funcionamiento del mercado* conduce a maximizar el ingreso nacional nominal  $R$  bajo la condición establecida por la relación (11) y considerando constantes los precios  $x$  e  $I$ . Se tiene así

$$(13) \quad \frac{1}{r} = \frac{\frac{\partial \bar{R}}{\partial X_0}}{x} = \frac{\frac{\partial \bar{R}}{\partial X_1}}{x(1+I)} = \dots = \frac{\frac{\partial \bar{R}}{\partial X_n}}{x(1+I)^n} = \dots$$

Estas son las condiciones de maximización del rendimiento social (asignación óptima de recursos para una cantidad dada de trabajo,  $X$ , y para una determinada tasa  $I$  de interés; es decir, para una cierta cantidad total de capital, puesto que esta cantidad es una función dada de  $I$ ).

#### CONDICIONES DEL OPTIMUN DE CAPITALIZACIÓN

11. Situándonos en el caso de un optimun de gestión, es posible investigar para qué cantidad de capital, es decir para qué valor de  $I$ , el ingreso nacional real  $\bar{R}$  es máximo.

Esto se reduce a indagar bajo qué condiciones  $\bar{R}$  es máximo, para

$$(14) \quad X_0 + X_1 + \dots + X_n + \dots = X$$

La teoría de los máximos con variables ligadas nos provee las condiciones

$$(15) \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_0} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_1} = \dots = \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_n} = \dots$$

De la comparación de las relaciones (13) y (15), se sigue

$$(16) \quad I = 0$$

Esta es la condición de estacionaridad de  $\bar{R}$ .

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones de producción, se podría demostrar que éstas son, asimismo, las condiciones que hacen máximo a  $\bar{R}$  <sup>(13)</sup> <sup>(14)</sup>.

Resulta así que, para una tasa de interés nula, el ingreso nacional  $\bar{R}$  alcanza un máximo  $\bar{R}_m$ .

#### CASO GENERAL

12. En el caso general, se tiene

$$(17) \quad \bar{R} = f[\varphi(\theta)]$$

El ingreso nacional real aparece de este modo como una función de la función  $\varphi(\theta)$ .

La función  $f$  representa lo que podemos llamar "*función general de producción*".

---

(13) Respecto al ejemplo de los pescadores estudiado antes, se advierte que si uno de los pescadores dedica todo su tiempo a la confección de redes, la pesca total obtenida por los tres será mayor que si no se emplearan redes. Pero es evidente que si los tres pescadores no hacen más que confeccionar redes, la pesca total será nula. Hay, pues una determinada distribución del tiempo de los tres pescadores —entre trabajo indirecto (fabricación de redes) y trabajo directo (pesca)— que hace máxima la cantidad de pescado obtenida.

(14) Ver "Economie et Intérêt", Anexo I, p. 634.

FÓRMULAS DE PRIMERA APROXIMACIÓN

13. Es posible demostrar que cuando la tasa  $i$  de interés es suficientemente pequeña, se tiene, en primera aproximación <sup>(15)</sup>

(15) "Economie et Intérêt", p. 132, relación (15); p. 133, relación (19); y p. 202, relación (1).

Se tiene, en efecto, a partir de las relaciones (3), (6) y (7).

$$(a) \quad R = R_w \int_0^{\infty} e^{i\theta} \varphi(\theta, i) d\theta := \\ = R_w \int_0^{\infty} \left( 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2} + \dots \right) \varphi(\theta, i) d\theta \sim R_w (1 + i\theta)$$

luego, con arreglo a la relación (9),

$$(b) \quad \gamma = \frac{C}{R} = \frac{1}{(1 + i\theta + \dots)} \int \frac{i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2} + \dots}{i} \varphi(\theta, i) d\theta = \theta$$

Por último, admitiendo la homogeneidad de la función de producción (hipótesis que no se formuló más que implícitamente en "Economie et Intérêt", p. 187), se tiene

$$(c) \quad \frac{\delta \bar{R}}{R} = \frac{\int_0^{\infty} \delta \varphi e^{i\theta} d\theta}{\int_0^{\infty} \varphi e^{i\theta} d\theta} = \delta i \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(\theta, i)}{\partial i} e^{i\theta} d\theta \sim i \delta i \int_0^{\infty} \theta \frac{\partial \varphi(\theta, i)}{\partial i} d\theta$$

puesto que

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \dots, \quad \int \varphi = 1, \quad \int \delta \varphi = 0$$

Se tiene, pues,

$$\delta \bar{R} \sim R_w \frac{d\theta}{di} i \delta i \quad (\text{Economie et Intérêt, p. 188, (9)})$$

de donde

$$\bar{R}_m - \bar{R} = R_w \frac{d\theta}{di} \int_1^{\infty} i \delta i = -R_w \frac{i^2}{2} \frac{d\theta}{di}$$

$$(18) \quad R := R_w (1 + i \odot)$$

$$(19) \quad \gamma = \frac{C}{R} = \odot$$

$$(20) \quad \frac{\bar{R}_m - \bar{R}}{\bar{R}_m} = \frac{i^2}{2} \frac{d \odot}{d i}$$

cualquiera sea la forma particular de la función  $\varphi(\theta)$ .

★

### III. MODELO EXPLICATIVO DE LA TEORIA GENERAL

La teoría general, que precede, puede ser explicada por un modelo muy simple que, hasta donde se puede juzgar, presenta gran coherencia con los datos estadísticos disponibles.

#### 1. LAS HIPÓTESIS DEL MODELO

El modelo considerado descansa sobre dos hipótesis muy naturales.

Estas hipótesis son las siguientes:

#### a) HIPÓTESIS (a): LINEALIDAD LOGARÍTMICA DE LA FUNCIÓN GLOBAL DE PRODUCCIÓN

14. Empleando notaciones discontinuas (análisis por períodos) <sup>(16)</sup>, el ingreso nacional real  $\bar{R}$  asume la forma

$$(21) \quad \bar{R} = a R_0^{b_0} R_1^{b_1} \dots R_t^{b_t} \dots$$

en donde  $a, b_0, b_1, \dots, b_t, \dots$  son constantes, y  $R_0, R_1, \dots, R_t, \dots$  son las partes del ingreso nacional originario que contribuyen al ingreso real en el momento  $t$ .

(16) Parágrafo 9.

De este modo, se tiene

$$(22) \quad \bar{L}\bar{R} = L\alpha + b_0LR_0 + b_1LR_1 + \dots + b_nLR_n + \dots$$

y

$$(23) \quad \frac{d\bar{R}}{\bar{R}} = b_0 \frac{dR_0}{R_0}$$

*Esta condición simplemente expresa que las elasticidades del ingreso nacional real, con respecto a las cantidades de ingreso originario provistas en los diferentes períodos, son constantes, condición absolutamente natural si se consideran los resultados estadísticos obtenidos por numerosos economistas en cuanto concierne a funciones de producción.*

Con notación continua, la relación (22) puede escribirse

$$(24) \quad \bar{L}\bar{R} = L\alpha + \int_0^{\infty} \beta_0 L r_0 d\theta$$

que, teniendo en cuenta la relación (1), puede ponerse del siguiente modo:

$$(25) \quad \bar{L}\bar{R} = L\alpha + kLR_0 + \int_0^{+\infty} \beta(\theta) L r_0(\theta, i) d\theta \quad \text{Hipótesis (a)}$$

con

$$(26) \quad k = \int_0^{\infty} \beta(\theta) d\theta$$

**b) HIPÓTESIS (b): DECREMENTO EXPONENCIAL DE LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA CON EL TIEMPO (LEY DE AMORTIZACIÓN EXPONENCIAL)**

15. De acuerdo con la segunda hipótesis, el equilibrio de régimen permanente que se ha establecido es tal, que se tiene, para todo valor de la tasa  $i$  de interés.

(27)

$$\varphi(\theta, i) = Ae^{-B\theta} \quad \text{Hipótesis (b)}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones de la tasa  $i$ .

Es, en efecto, completamente natural admitir que, para un valor dado de  $i$ , la función característica decrece exponencialmente a través del tiempo. —Después de lo que hemos visto (parágrafo 8), esta hipótesis conduce otra vez a suponer que la amortización del ingreso originario, con el tiempo, es una amortización exponencial.

Como la amortización  $a$  de un capital  $c$  está dada por la relación

$$a = -\frac{dc}{dt}$$

la hipótesis

$$a = a_0 e^{-B\theta}$$

da

$$c = c_0 e^{-B\theta}$$

Por tanto, la hipótesis hecha implica que el decrecimiento —en el mercado— del valor de los capitales sea exponencial.

## 2. CONSECUENCIA DE LAS HIPÓTESIS

### A) CONSECUENCIAS DE LA HIPÓTESIS (b)

16. De la hipótesis (b), teniendo en cuenta la relación (2), se deduce inmediatamente:

$$(28) \quad \int_0^{+\infty} \varphi(\theta, i) d\theta = \frac{A}{B} = 1$$

$$(29) \quad \textcircled{C} = \frac{\int_0^{+\infty} \theta \varphi(\theta, i) d\theta}{\int_0^{+\infty} \varphi(\theta, i) d\theta} = \frac{1}{A}$$

$$(30) \quad R = R_w \int_0^{+\infty} e^{i\theta} \varphi(\theta, i) d\theta = \frac{R_w}{1 - i \textcircled{a}}$$

$$(31) \quad \frac{C}{R} = \frac{R - R_w}{iR} = \textcircled{a}$$

y

$$(32) \quad \varphi(\theta, i) = \frac{1}{\textcircled{a}} e^{-\frac{\theta}{\textcircled{a}}}$$

Se ve, pues, que la relación (19), que es sólo aproximada en el caso general, aquí se verifica rigurosamente (relación (31)).

La relación (30) igualmente se verifica, aunque puede escribirse en primera aproximación bajo la forma (19), indicada para el caso general.

B) CONSECUENCIAS DE LAS HIPÓTESIS (a) y (b)

17. *Por otra parte, el funcionamiento del mercado tiene por efecto hacer mínimo el costo nominal de producción.*

$$(33) \quad R = R_w \int_0^{+\infty} e^{i\theta} \varphi(\theta, i) d\theta$$

para un ingreso nacional real  $\bar{R}$  dado y una tasa  $i$  de interés también dada (17).

Se tiene, entonces, a partir de la relación (33) y para todo sistema de variaciones virtuales  $\delta\varphi$  de  $\varphi$

$$(34) \quad \int_0^{+\infty} e^{i\theta} \delta\varphi d\theta = 0$$

Condicionada por la ecuación

$$(35) \quad \frac{\delta\bar{R}}{\bar{R}} = \int_0^{+\infty} \beta(\theta) \frac{\delta\varphi}{\varphi} d\theta = 0$$

(17) Ver parágrafo 10, más arriba, y *Economie et Intérêt*, N° 69, p. 190.

puesto que la relación (25) representa la función de producción.<sup>(18)</sup>

Ello implica que se tenga

$$(36) \quad e^{i\theta} = K(i) \frac{\beta(\theta)}{\varphi(\theta, i)}$$

donde  $K$  es una función de  $i$

Luego, de la relación (32) se tiene:

$$(37) \quad \beta(\theta) = \frac{1}{K(i)} e^{-(1-i\theta)\frac{\theta}{i}}$$

18. Como la función  $\beta(\theta)$  es independiente de  $i$  y puesto que el producto  $K(i)$  es independiente de  $\theta$ , resulta necesariamente

$$(38) \quad \frac{1}{K(i)} = \lambda$$

$$(39) \quad \frac{1}{i} - i = \mu$$

Siendo  $\lambda$  y  $\mu$  constantes independientes de  $i$

Se tiene, pues,

(40)

$$\beta(\theta) = \lambda e^{-\mu\theta}$$

(18) Conviene destacar que, cualquiera sea  $\delta_{\varphi}$ , se tiene

$$\int_0^{+\infty} \delta_{\varphi} d\theta = 0$$

Sin embargo, el mercado ignora esta ecuación de condición en sus cálculos y no hay por qué tenerla en cuenta aquí



Si se expresa por  $\Theta_0$  el valor de  $\Theta$  para  $i = 0$ , se sigue

$$(41) \quad \mu = \frac{1}{\Theta_0}$$

y, por consiguiente,

$$(42) \quad i = \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0} \quad (19)$$

Se obtiene, a partir de (32),

$$(43) \quad \varphi(\theta, i) = \frac{1 + i\Theta_0}{\Theta_0} e^{-(1 + i\Theta_0)\frac{\theta}{\Theta_0}}$$

19. Se deduce, todavía, después de (30) y (31)

$$(44) \quad C = \Theta R = \frac{\Theta R_0}{1 - i\Theta} = \frac{R_0}{\frac{1}{\Theta} - i}$$

y por consiguiente, a partir de (42),

$$(45) \quad C = \Theta_0 R_0$$

(19) De esta relación se deduce

$$(1 + i\Theta_0)(1 - i\Theta) = 1$$

Teniendo en cuenta (42), la relación (30) puede escribirse

(30')

$$R = R_0(1 + i \ominus_0)$$

Esta relación puede también ser deducida de las igualdades (8) y (45).

20. De (40) se sigue:

$$(46) \quad k = \int_0^{+\infty} \beta(\theta) d\theta = \frac{\lambda}{\mu}$$

Entonces, a partir de (41), resulta

$$(47) \quad \lambda = \frac{k}{\ominus_0}$$

De acuerdo con las relaciones (40) y (41) se tiene

$$(48) \quad \beta(\theta) = \frac{k}{\ominus_0} e^{-\frac{\theta}{\ominus_0}}$$

21. Considerando (25), (32) y (48), se obtiene

$$(49) \quad LR = L\alpha + kLR_0 - \int_0^{\infty} \frac{k}{\ominus_0} e^{-\frac{\theta}{\ominus_0}} \left( \frac{\theta}{\ominus} + L\ominus \right) d\theta$$

de forma que

$$(50) \quad \bar{R} = \alpha \left\{ R_0 \frac{e^{-\frac{\theta_0}{\ominus}}}{\ominus} \right\}^k$$

Se tiene entonces

$$(51) \quad \boxed{\frac{d\bar{R}}{d\Theta} = \frac{k}{\Theta} \left( \frac{\Theta_0}{\Theta} - 1 \right)}$$

relación que, atendiendo a (42), puede escribirse así

$$(51') \quad \boxed{\frac{d\bar{R}}{\bar{R}} = -k \frac{\Theta_0^2}{1 + \Theta_0 i} di}$$

De este modo se observa que  $\bar{R}$  pasa por un máximo  $\bar{R}_M$  para

$$(52) \quad \Theta = \Theta_0$$

y se tiene

$$(53) \quad \bar{R}_M = \alpha \left[ \frac{R_{\omega}}{\Theta_0} e^{-1} \right]^{\kappa}$$

Entonces,

$$(54) \quad \boxed{\frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \left[ \frac{\Theta_0}{\Theta} e^{1 - \frac{\Theta_0}{\Theta}} \right]^{\kappa}}$$

Y esto puede todavía transformarse, si se tiene en cuenta la relación (42)

$$(55) \quad \boxed{\frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \left[ (1 + \Theta_0 i) e^{-\Theta_0 i} \right]^{\kappa}}$$

22. En resumen, de las dos hipótesis (a) y (b), resultan las siguientes relaciones: <sup>(20)</sup>

$$\begin{array}{l}
 \text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\theta, i) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}} \\ \varphi(\theta, i) = \frac{1 + i\Theta_0}{\Theta_0} e^{-(1 + \Theta_0) \frac{\theta}{\Theta_0}} \end{array} \right. \\
 \text{(B)} \\
 \text{(C)} \quad \beta(\theta) = \frac{k}{\Theta_0} e^{-\frac{\theta}{\Theta_0}} \\
 \text{(D)} \quad \frac{C}{R} = \Theta \\
 \text{(E)} \quad \frac{C}{R_w} = \Theta_0 \\
 \text{(F)} \quad R = \frac{R_w}{1 + i\Theta} \quad R = R_w(1 + i\Theta_0) \\
 \text{(G)} \quad \Theta = \frac{\Theta_0}{1 + i\Theta_0} \quad \text{ó} \quad i = \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0} \\
 \text{(H)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \left[ \frac{\Theta_0}{\Theta} e^{1 - \frac{\Theta_0}{\Theta}} \right]^{\kappa} \quad \bar{R}_M = \alpha \left[ \frac{R_w}{\Theta_0} e^{-1} \right]^{\kappa} \\ \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \left[ (1 + \Theta_0 i) e^{-\Theta_0 i} \right]^{\kappa} \end{array} \right. \\
 \text{(I)}
 \end{array}$$

(20) Como lo he indicado antes, las relaciones (A) y (D), así como la primera relación (F), provienen de considerar sólo la hipótesis (b).

$\bar{R}_m$  representa el valor máximo del ingreso nacional real  $\bar{R}$ , obtenido para  $\theta = \theta_0$ , siendo  $i = 0$ .

A estas relaciones pueden agregarse las siguientes relaciones diferenciales:

(J)

$$d\theta = -\theta^2 di$$

(K)

$$dR = \theta_0 R_0 di = C di$$

(L)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{R}}{\bar{R}} = k \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \frac{d\theta}{\theta} \quad (21) \end{array} \right.$$

(M)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{R}}{\bar{R}} = -k \frac{\theta^2}{1 + \theta_0 i} i di \end{array} \right.$$

### 3. INTERPRETACIÓN DE LAS CONSECUENCIAS

Se pueden resumir del siguiente modo las principales consecuencias del modelo:

a) EXISTENCIA DE UN MÁXIMO PARA EL INGRESO NACIONAL REAL

23. A partir de las relaciones (I) y (M), el ingreso nacional real  $\bar{R}$  registra un máximo  $\bar{R}_m$  cuando la tasa de interés es nula.

Por supuesto que este valor depende del país y de la época considerados.

b) VARIACIÓN DE  $\theta$  Y DE  $\bar{R}$  CON  $i$

(21) En el entorno de  $\theta = \theta_0$  se obtiene

$$\frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}_m} = \frac{k (\theta_0 - \theta)^2}{2 \theta_0^2}$$

24. Siendo  $\Theta$  necesariamente positivo,  $i$  no puede variar más que entre  $-\frac{1}{\Theta_0}$  y  $+\infty$ , y (relaciones (G) e (I)), se tiene

$$\begin{array}{c|ccc} i & -\frac{1}{\Theta_0} & 0 & +\infty \\ \Theta & +\infty \rightarrow \Theta_0 & \rightarrow & 0 \\ R & 0 \rightarrow \bar{R}_M & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Agrego en Anexo I un ábaco que provee, para distintos valores de  $\Theta_0$ , la correspondencia entre  $\Theta$  e  $i$ , deducida de la relación (G).

Es interesante observar que en la medida en que la función general de producción satisfaga la hipótesis (a) de linealidad logarítmica, la tasa de interés *descenderá* por debajo del valor  $-\frac{1}{\Theta_0}$ .

Esta circunstancia actúa paralelamente a la liquidez monetaria y la apropiación privada de las tierras, para mantener la tasa del interés por encima de un cierto nivel <sup>(22)</sup>.

c) CONSTANCIA DEL VALOR SALARIAL DEL CAPITAL PRODUCTIBLE

25. Si designamos por  $s$  el salario básico por hora, se tendrá, a partir de la relación (E)

$$\frac{C}{s} = \Theta_0 \frac{R_0}{s}$$

Esta igualdad significa que *el valor salarial del capital productible es independiente de la tasa de interés.*

(22) Ver mi trabajo "Economie et Intérêt", Cap. IX, El Problema del Interés, y muy especialmente las páginas 499 a 502.

Esta es, ciertamente, una circunstancia que *merece ser destacada*. Ella implica que, para una tecnología determinada, el valor salarial del capital productible es independiente del grado de desarrollo capitalista de la economía; dicho de otra manera, *en valor salarial, el ahorro acumulado necesario es el mismo para una economía muy desarrollada (i cercana a cero) que para una economía subdesarrollada (i muy alta)* (23).

Esta propiedad guarda correspondencia con la siguiente observación: *evaluado en horas de trabajo*, el capital productible de una economía subdesarrollada presenta valores enteramente comparables a los de los países avanzados (24).

d) EXPRESIÓN DEL CAPITAL PRODUCTIBLE REAL

26. No obstante, si se toma como unidad de valor el valor de la unidad de ingreso real, se tendrá, según las relaciones (12) y (D)

$$(57) \quad \bar{C} = \frac{C}{r} = \ominus \frac{R}{r} = \ominus \bar{R}$$

donde  $\bar{C}$  representa el valor real del capital nominal C.

Por tanto, se tiene

$$(58) \quad \bar{C} = \bar{R}_M \frac{\ominus^{\kappa_0}}{\ominus^{\kappa-1}} e^{\kappa \left(1 - \frac{\ominus_0}{\ominus}\right)}$$

Para  $\ominus < \ominus_0$ , el valor real del capital es una función creciente de

(23) Que el capital C es constante, cuando i varía, se explica por el hecho de que el crecimiento del desvío medio  $\ominus$  está exactamente compensado por el decrecimiento del factor  $e^{i\theta}$ , para i decreciente.

(24) En una tribu del Africa Central, el equipo de chozas, herramientas primitivas, piraguas, armas, etc.... Corresponde, teniendo en cuenta la poca eficacia de los procesos de producción utilizados, a un valor considerable de ahorro acumulado (evaluado en horas de trabajo).

$\Theta$  <sup>(25)</sup>; en consecuencia, el valor real del capital resulta, de acuerdo con la relación (G), una función decreciente de  $i$ . De esta manera, se verifica que, *en cantidad física*, el valor del capital decrece cuando la tasa de interés aumenta por valores positivos, resultado éste que está perfectamente de acuerdo con el análisis clásico.

e) BENEFICIO SUSCEPTIBLE DE OBTENERSE POR AUMENTO DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

27. Mientras el período de producción  $\Theta$  sea inferior a  $\Theta_0$ , el ingreso real  $\bar{R}$  será inferior a su valor máximo  $\bar{R}_M$ . Llevando  $\Theta$  hasta el valor  $\Theta_0$ , o sea disminuyendo  $i$  hasta un valor cero, se puede incrementar el ingreso nacional real  $\bar{R}$  en el valor relativo de la siguiente fracción:

$$(59) \quad g = \frac{\bar{R}_M - \bar{R}}{\bar{R}}$$

Y resulta, de acuerdo con la relación (H),

$$(60) \quad g = \left[ \begin{array}{c} \Theta \frac{\Theta_0}{\Theta} - 1 \\ -e \\ \Theta_0 \end{array} \right]^{\kappa} - 1$$

O, todavía, según (I),

$$(61) \quad g = \left[ \frac{1}{1 + i\Theta_0} e^{\Theta_0 i} \right]^{\kappa} - 1$$

(25) Se tiene

$$\frac{1}{\bar{C}} \cdot \frac{d\bar{C}}{d\Theta} = \frac{k}{\Theta} \left( \frac{\Theta_0}{\Theta} \frac{k-1}{k} \right)$$

Esta derivada es nula para

$$\Theta = \frac{k}{k-1} \Theta_0 \quad \text{e} \quad i = \frac{1}{k \cdot \Theta_0}$$



$g$  es lógicamente mínimo e igual a cero, para  $\Theta = \Theta_0$  o  $i = 0$ .

f) EXPRESIÓN DE LA PRODUCTIVIDAD

28. El ingreso real por unidad de ingreso originario, es decir, la *productividad*  $p$ , es igual, a partir de la relación (H), a

$$(62) \quad p = \frac{\bar{R}}{R_0} = \frac{\bar{R}_M}{R_0} \left[ \frac{\Theta_0}{\Theta} e^{i - \frac{\Theta_0}{\Theta}} \right]^k$$

g) HIPÓTESIS DE DECRECIMIENTO EXPONENCIAL DE LAS ELASTICIDADES DE PRODUCCIÓN

29. En lugar de establecer la hipótesis (b) de amortización exponencial, se podría formular la hipótesis de que los coeficientes  $\beta$  decrecen exponencialmente a través del tiempo (es decir, que las elasticidades de la producción, respecto de los incrementos del ingreso originario, decrecen exponencialmente con el tiempo).

En este caso, tendríamos por hipótesis

$$(63) \quad \beta(\theta) = \frac{k}{\Theta_0} e^{-\frac{\theta}{\Theta_0}} \quad (\text{hipótesis (b')})$$

La relación (36) seguiría siendo válida y tendríamos

$$(64) \quad \varphi(\theta, i) = \frac{kK(i)}{\Theta_0} e^{-\left(i + \frac{1}{\Theta_0}\right)\theta}$$

Y, de la relación (2), resultaría entonces

$$(65) \quad j + \frac{1}{\Theta_0} = \frac{kK(i)}{\Theta_0}$$

Y por consiguiente, según (2) y (6),

$$(66) \quad \Theta = \frac{\Theta_0}{1 + i \Theta_0}$$

de donde

$$(67) \quad \varphi(\theta, i) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}}$$

*Por tanto, dada la hipótesis (a), las hipótesis (b) y (b') son equivalentes.*

h) EXISTENCIA DE UN MÁXIMO FINITO PARA EL INGRESO NACIONAL REAL

30. Se podría fácilmente demostrar que *la existencia de un máximo finito  $\bar{R}_M$  responde al hecho que, para valores grandes de  $\theta$ , los coeficientes  $\beta(\theta)$  decrecen con  $\theta$* . Si así no sucediera, habría interés en emplear infinitamente los procesos subsidiarios de producción y, de la hipótesis (a), resultaría entonces un valor infinito para  $\bar{R}_M$ .

La limitada extensión de nuestros conocimientos determina que sea desventajoso llevar al infinito los procesos subsidiarios de producción, y de ello resulta la existencia de un máximo finito  $\bar{R}_M$ .

i) SIGNIFICADO DEL COEFICIENTE  $\Theta_0$

31. La relación

$$(68) \quad \beta(\theta) = \frac{k}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}}$$

implica que  $\Theta_0$  es un coeficiente característico de las condiciones de producción y que no depende más que de ellas.

*De este modo, el coeficiente  $\Theta_0$  debe considerarse absolutamente independiente de la psicología de los consumidores.*

j) LA TASACIÓN DE LOS INGRESOS ORIGINARIOS

31. Cuando consideramos la función de producción

$$(69) \quad \bar{R} = a R_0^{b_0} R_1^{b_1} \dots R_n^{b_n} \quad (26)$$

no hay ninguna dificultad para verificar su naturaleza en el caso particular en que las  $R_i$  son cantidades de trabajo provisto en diferentes épocas, cantidades éstas que afluyen a una cierta producción  $\bar{R}$ , en el momento  $t$ .

Sin embargo, si en estadios intermedios de los bienes durables se encuentran productos que vuelven a ser utilizados en el curso del tiempo, puede preguntarse —desde un punto de vista puramente contable— cuál es la regla según la que será tasado el valor de estos bienes entre las diferentes producciones sucesivas, y aun si esta tasación no es un poco arbitraria en cuyo caso, la función de producción perdería su significado.

La respuesta es que este problema de tasación no podría plantearse más que para los bienes durables que subsisten después del instante  $t$  considerado.

Para estos bienes, el mecanismo del mercado en estado de optimum de gestión determina la tasación.

Dada esta tasación, las  $R_i$  quedan perfectamente definidas y por consiguiente queda también definida la producción que puede obtenerse con esas  $R_i$ .

La dificultad no aparece en el caso del ejemplo de los pescadores, tratado en el párrafo 5. Surgiría, en cambio, si la red durara dos años, en cuyo caso convendría conocer, para definir la función característica, la ley de amortización de la red. Si la pesca fuese exactamente la misma con una red vieja que con una red nueva, la tasación debiera hacerse por mitades. Caso contrario, interesaría considerar las productividades de la red en el transcurso de los dos años. La tasación resultará entonces de las productividades marginales de ambos tipos de red y, justamente, el mercado permite tener en cuenta estas productividades marginales.

(26) Relación (21), párrafo 14.

k) COMPORTAMIENTO DE LOS AHORRISTAS

32. Podría pensarse en extender los principios básicos del modelo al caso de los ahorristas.

Para simplificar, supongamos que la sociedad, en conjunto, actúa como si buscara maximizar una función de satisfacción de la forma

$$(70) \quad \bar{S} = \int_0^{\infty} \gamma(\theta) L R(\theta) d\theta$$

Si C es el capital productible existente, debemos tener:

$$(71) \quad \int_0^{\infty} R(\theta) e^{-i\theta} d\theta = C + \int_0^{\infty} R_w(\theta) e^{-i\theta} d\theta$$

que es la condición presupuestaria de relación. Para maximizar S, bajo esta ecuación de condición, la sociedad considerada debe satisfacer la condición (27)

$$(72) \quad K(i) \frac{\gamma(\theta)}{R(\theta)} = e^{-i\theta}$$

Si el valor nominal del ingreso nacional  $R(\theta)$ , permanece constante, (28) esta condición implica que  $\gamma(\theta)$  sea de la forma

$$(73) \quad \gamma(\theta) = e^{-\lambda\theta} \quad (29)$$

y que se tenga

$$(74) \quad i = \lambda$$

Si  $R(\theta)$  y  $R_w(\theta)$  son constantes, la relación (71) se transforma en

$$(75) \quad R = R_w + iC$$

Y volvemos, de este modo, a la relación general (8).

(27) Ver parágrafo 17, más arriba.

(28) Lo que no excluye la posibilidad de que su valor real pueda crecer.

(29) Puesto que  $\bar{S}$  no puede estar definido más que para un factor inmediato.

Por supuesto que la tasa de interés es la tasa media de interés que la economía utiliza para actualizar valores futuros,

Si se asociara este modelo (30) con el modelo de acumulación de capital precedente, se llegaría a los siguientes resultados:

- a) la psicología de los consumidores determinaría, por sí misma, la tasa  $i$ .
- b) los conocimientos técnicos determinarían, por sí solos, el parámetro  $\Theta_0$ .
- c) el coeficiente de capitalización  $\Theta$  quedaría determinado por la relación (G)

$$\frac{1}{\Theta} = i + \frac{1}{\Theta_0}$$

Este coeficiente dependería, de esta manera, de las condiciones técnicas y psicológicas simultáneamente.

#### 1) EXTENSIÓN A UN RÉGIMEN EVOLUTIVO

33. El precedente modelo, supone un régimen permanente de provisión perfecta, donde los conocimientos técnicos permanecen constantes, es decir, donde no existe riesgo ni progreso técnico.

Parecería posible extender este modelo al caso en que los conocimientos técnicos varían y en que hay alguna incertidumbre respecto al futuro, bajo las hipótesis siguientes:

Ante todo, se puede suponer que la función general de producción (25) tiene en cuenta —por sí misma— el riesgo (31).

Por otra parte, según veremos, la contrastación del modelo con los datos estadísticos conduce a considerar el máximo  $\bar{R}_M$  del ingreso nacional real como una función del tiempo  $t$  (progreso técnico), pero también lleva, en oposición a ello, a la hipótesis de que la función característica  $\varphi(\theta, i)$  —por una parte— y los coeficientes de la función general de producción  $\beta(\theta)$  —por otra parte— pueden ser

(30) Del que yo no subrayaría excesivamente su carácter simplificado y cuyas hipótesis parecen bastante menos fundamentadas que las del modelo de acumulación de capital propuesto.

(31) Con coeficientes  $\beta(\theta)$  más rápidamente decreciente con  $\theta$ .

considerados, por lo menos en primera aproximación, como independientes del tiempo  $t$  <sup>(32)</sup>.

Por último, si la función general de producción considera —en sí misma— el riesgo, todo sucede, dentro del cuadro del modelo, como si los arbitrios económicos condujeran a las empresas a emplear en los cálculos referentes a la función general de producción, la tasa de interés correspondiente a las imposiciones sin riesgo y sin liquidez, o sea una tasa igual a la tasa del interés puro <sup>(33)</sup>.

Es pues esta tasa, la que hay que considerar en las aplicaciones numéricas.

m) VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA TEORÍA GENERAL

34. De todo cuanto antecede resulta que *las fórmulas obtenidas verifican evidentemente, en el caso del modelo particular examinado, los resultados que yo había deducido de la teoría general presentada en mi obra "Economie et Intérêt"* <sup>(34)</sup>.

(32) Ver las indicaciones dadas en § 42, más adelante.

(33) Yo he definido la tasa del interés puro como correspondiente a una imposición sin riesgos y sin liquidez (ver "Economie et Intérêt", p. 253 a 263); esto es prácticamente la tasa de interés pagada por una colocación sobre primera hipoteca.

(34) Las dos relaciones aproximadas (18) y (19) fueron ya verificadas (relaciones F, y D) y la relación (20) lo será en el caso de homogeneidad (§ 35, relación 79).

Otras fórmulas más complejas que utilicé en "Economie et Intérêt" pueden igualmente verificarse.

a) Así, la relación (Economie et Intérêt, p. 133, relación 5)

$$\frac{dC}{dR} = \frac{d\Theta}{dI} - \Theta^2 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \theta^2 \varphi(\theta) d\theta$$

Se transforma, a partir de la relación (D), en

$$\Theta^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\theta^2}{\Theta} - e^{-\frac{\theta}{\Theta}} d\theta$$

relación efectivamente verificada.

IV. CASO EN QUE LA FUNCION GLOBAL DE PRODUCCION  
ES HOMOGENEA

HIPÓTESIS (c): HOMOGENEIDAD DE ORDEN UNO DE LA FUNCIÓN GLOBAL DE PRODUCCIÓN CON RESPECTO A LOS LOGARITMOS

35. Si además se supone, como es natural en primera aproximación, que la relación (21) es homogénea, se tiene la condición

$$(N) \quad k = \int_0^{\infty} \beta(\theta) d\theta = 1 \quad \text{hipótesis (c)}$$

En este caso, por supuesto que todas las relaciones precedentes se mantienen inalterables, salvo (C), (H) e (I) que se transforman en

(C')	$\beta(\theta) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{\theta}{\omega_0}}$
(H')	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \frac{\omega_0}{\omega} e^{1 - \frac{\omega_0}{\omega}} \\ \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = (1 + \omega_0 i) e^{-\omega_0 i} \end{array} \right.$
(I')	

b) lo mismo, la relación (Economie et Intérêt, p. 142, relación 2)

$$\frac{dC}{di} = R_w \left[ \frac{dC}{di R} + \omega^2 \right]$$

puede escribirse, según las relaciones D, F y G.

$$\frac{d(\omega_0 R_w)}{di} = R_w \left[ \frac{d\omega}{di} + \omega^2 \right] = 0$$

36. Por otro lado, los comentarios que anteceden se modifican tal como sigue:

a) Aquí se tiene para el valor real del capital (relación 58)

$$(76) \quad \bar{C} = \bar{R}_M \Theta_0 e^{1 - \frac{\Theta_0}{\Theta}}$$

Que es, por tanto, una función creciente de  $\Theta$  y decreciente de  $i$ , en todos los casos.

b) Se tiene aquí (relación 61)

$$(77) \quad g = \frac{\Theta}{\Theta_0} e^{\frac{\Theta_0}{\Theta} - 1} - 1$$

Doy en anexos BV y BVI un ábaco que provee  $g$  para diferentes valores de  $\Theta_0$  en función de  $\Theta$  y de  $i$  (teniendo en cuenta la relación (G)).

c) Se tiene, a partir de I'

$$(78) \quad \frac{\bar{R}_M - \bar{R}}{\bar{R}_M} = 1 - (1 + \Theta_0 i) e^{-\Theta_0 i}$$

y para pequeños valores de  $i$

$$(79) \quad \frac{\bar{R}_M - \bar{R}}{\bar{R}_M} \sim \frac{\Theta_0^2 i^2}{2}$$



Según G, se vuelve así a la relación aproximada (20) dada para la teoría general (35).

V. CONFRONTACION DEL MODELO CON LOS DATOS ESTADISTICOS

a) LEY DE LINEALIDAD LOGARÍTMICA DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

37. La ley de linealidad logarítmica de la función general de producción, que se ha empleado en el modelo, se justifica por el hecho de que todas las investigaciones estadísticas realizadas con respecto a las funciones de producción han conducido a resultados que se ajustan muy bien siguiendo una ley logarítmicamente lineal (36).

En particular, sabemos que las investigaciones de Douglas — así como también las de numerosos estadísticos que las han continuado — sobre la dependencia existente entre la producción industrial, por una parte, y el trabajo y el capital, por la otra, condujeron a leyes exponenciales del tipo

$$(80) \quad P = L^{\lambda} C^{\mu} \quad (37)$$

(35) En el caso de no homogeneidad se encuentra:

$$\frac{\bar{R}_M - \bar{R}}{\bar{R}_M} = -k \frac{d\theta}{di}$$

De este modo queda perfectamente verificado que la relación (c) de la nota (15) del párrafo 13 no es válida más que en el caso de homogeneidad.

(36) La razón profunda de esto radica en que son los logaritmos, y no los argumentos, los que intervienen en la naturaleza y que, por tanto, los ajustamientos lineales son válidos en intervalos mucho más amplios en consecuencia, que aquéllos en que se consideran los logaritmos.

(37) Ver especialmente:

DOUGLAS (P. H.): Are there laws of Production? The American Economic Review, Marzo 1948, Vol. XXXVIII, Nº 1, pág. 1 a 41.

DOUGLAS (P. H.): A Theory of Production. The American Economic Review. Supl. Vol. XVIII, Marzo 1958, pág. 139-165.

DOUGLAS (P. H.): La théorie et la politique des salaires. Revue Internationale du Travail. Vol. XXXIX, Nº 3, Marzo 1939, pág. 343 a 392.

Estos trabajos han sido muy discutidos, (38) pero parece que los resultados corresponden a una dependencia bastante real.

b) LEY DE AMORTIZACIÓN EXPONENCIAL

38. La ley de amortización exponencial

$$(81) \quad \varphi(\theta) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}}$$

que se traduce en la ley de decrecimiento del valor

$$(82) \quad \gamma(\theta) = 1 - \int_0^{\theta} \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}} d\theta = e^{-\frac{\theta}{\Theta}}$$

y que caracteriza al modelo, parece observar perfecto acuerdo con los resultados obtenidos del análisis de todos los datos estadísticos disponibles, relativos a los bienes durables, en todos los casos en que existe —para estos bienes— un mercado concurrencial suficientemente amplio.

Hay dos ejemplos particularmente interesantes: el de los automóviles de ocasión y el de las casas.

BORTEUX, en un trabajo muy interesante, ha estudiado con éxito (39) el mercado de los automóviles de ocasión (40). La ley empírica utilizada por BORTEUX (41) no es la ley exponencial, pero los datos numéricos que provee se adaptan extraordinariamente bien a

(38) Ver especialmente:

MENDERSHAUSEN (H): On the Significance of Professor Douglas, Production Function. *Econometrica*. Abril 1938, Vol. 6, N° 2, pág. 143-153.

(39) BORTEUX ha logrado superar gran número de dificultades de principios en su análisis.

(40) L'amortissement, dépréciation des voitures automobiles. *Revue de Statistique Appliquée*, Vol. IV, 1936, p. 56.

(41) Que él califica como "la menos mala de las leyes más simples". Señalemos, sin embargo, que la ley clásica de amortización constante es, en todo caso, absolutamente incompatible con los hechos.

esta ley, si no se consideran más que los valores tomados al final del segundo año. Esta circunstancia se explica por el hecho de que aquéllos que venden un automóvil tan pronto como lo compraron, tienen alguna razón anormal para hacerlo así (sea que ellos hayan tenido la mala suerte de adquirir un mal modelo, o sea que lo hayan usado intensiva o abusivamente).

BOITEUX examinó las cotizaciones en el mercado de ocasión, del Renault Primaquatre de todas las épocas de 1931 a 1939 y los del 11 CV Citroen de 1953 a 1955. Partiendo de valores tomados al final del segundo año, la ley de variación del valor de los automóviles es sensiblemente la misma y corresponde a una misma vida media

$$\Theta = 6 \text{ años}$$

Para las casas, los datos numéricos de BLANCK y WINNICK (42) se ajustan muy bien a una exponencial (43). Se encuentra una vida media.

$$\Theta = 50 \text{ años}$$

### c) ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE $h$

39. El análisis de los resultados estadísticos sobre la influencia de la dimensión de las economías sobre sus productividades, conduce a que —desde el punto de vista de las funciones de producción— no haya en proporción ninguna ventaja sensible.

(42) David M. BLANCK y Luis WINNICK, *Capital Formation in private non farm residential construction*, *Studies in Income and Wealth*, Vol. 19 (National Bureau of Economic Research, New York, 1957) p. 30.

(43) Las dificultades del análisis empírico son muy numerosas en el sector de la habitación.

Conviene, en efecto:

a) separar el valor del suelo del valor de la construcción;  
 b) establecer el valor de sustitución de un inmueble equivalente. Así pues, el progreso técnico y las modificaciones de estructura intervienen en este caso de manera no despreciable, puesto que se trata de bienes que tienen una vida muy larga;

c) distinguir, en el valor de mercado, la parte atribuible al valor original de aquella otra que proviene de modificaciones posteriores a la construcción inicial y que han disminuido la tasa de envejecimiento o bien la tasa de obsolescencia.

(1) De este modo, el análisis de los datos estadísticos dados por ROSTAS, sobre las productividades en 31 industrias de los Estados Unidos (44), proporciona los siguientes resultados: (45)

La correlación entre la productividad horaria  $p$  y la dimensión de las empresas, medida en número de obreros, es *negativa*. La nebulosa de puntos muestra gran dispersión. El coeficiente de correlación no es más que  $-0,43$  y es significativo sólo para el nivel del 2%. Lo que se observa es, pues, una cierta tendencia de la productividad a crecer, a medida que la dimensión decrece, con una elasticidad,  $dp/p/de/e$ , igual a  $-0,2$ .

(2) Existe una fuerte correlación entre la productividad horaria  $p$  y el volumen global  $q$  de cada industria (coeficiente de correlación de  $0,74$  y elasticidad de  $p$  con respecto a  $q$  igual a  $0,45$ ) (correlación de Verdoorn), pero, considerando la débil correlación observada entre productividad y dimensión de las empresas, debe interpretarse la alta correlación entre  $p$  y  $q$  como respondiendo —a la vez— a un doble efecto: aumento de demanda cuando la productividad crece, por un lado, y, por el otro, un efecto indirecto de influencia del mercado, no tanto sobre la magnitud de las series producidas, como sobre la eficiencia de las empresas en razón de una concurrencia creciente, cuyos efectos son un esfuerzo de estandarización, de investigación sistemática de la técnica óptima, etc.

*De allí resulta que, desde el punto de vista de las funciones de producción, no hay ningún efecto de dimensión de la economía sobre la productividad, para economías tales como las de Europa Occidental y la Americana.*

Se puede pues tomar para  $k$ , en el modelo, el valor:

(83)

$$k = 1$$

(44) ROSTAS: Comparative Productivity in British and American Industry. Cambridge University Press, 1948.

(45) ALLAIS: L'Europe Unie, Route de la Prospérité — Calmain Lévy, París 1960, Apéndice ID. — Influence de la taille de l'économie sur le revenu réel par tête, p. 299.

(3) Este valor está aun justificado por el hecho de que en numerosas investigaciones estadísticas respecto a funciones globales de producción en la industria, se han encontrado funciones homogéneas.

Este es, especialmente, el caso de la función de DOUGLAS antes citada<sup>(46)</sup>. La mayoría de estas investigaciones conducen a la relación:

$$\lambda + \mu = 1$$

que significa homogeneidad de orden *uno*.

(4) Para la economía, en conjunto, la hipótesis de homogeneidad está justificada y ello resulta de la circunstancia de estar dicha hipótesis justificada para los diferentes sectores de la economía.

Este mismo hecho puede considerarse como una consecuencia de la estabilidad del equilibrio económico, constatada en los períodos sin perturbaciones monetarias.

Si existiesen beneficios proporcionalmente grandes, la economía de mercado sería inestable.

#### d) ESTIMACIÓN DE *i*

40. La tasa de interés que interviene en el modelo es la tasa del interés puro<sup>(47)</sup>. Esta tasa corresponde a una imposición que no ofrece ninguna ventaja de liquidez y tampoco riesgo alguno. Es, aproximadamente, la tasa de una colocación sobre primera hipoteca.

Para obtenerla, pienso que puede agregarse un 1% a la tasa de interés de las buenas obligaciones<sup>(48)</sup>.

Así, en los Estados Unidos, en 1955, la tasa de rendimiento *i'* de las buenas obligaciones fue de 3,25%<sup>(49)</sup>. Tomaremos, por tanto,

$$i = 3,25 + 1\% = 4,25 \%$$

Existen, sin embargo, razones para pensar que esta tasa del 3,25% es anormalmente baja. La tasa *i'* ha registrado, en estos últi-

(46) Parágrafo 37. Ver igualmente las indicaciones proporcionadas en § 44, más adelante.

(47) Parágrafo 35.

(48) ALLAIS: *Economie et Intérêt*, p. 260, Ncta (15).

(49) *Economic Almanac* 1960, p. 80.

mos años, una tendencia constante a elevarse, pasando de 2,86% en 1950 a 4,69% en junio de 1959. Tiene, pues, tendencia a reencontrarse con su nivel medio, del orden del 5% para el período 1900-1935. De manera que podemos considerar normal un valor medio de  $i$  del 6% (50).

e) ESTIMACIÓN DE C, R y C/R

41. En el modelo, C es el valor del capital productible y R el del ingreso nacional.

Una dificultad se presenta para los bienes durables de consumo (automóviles, heladeras, etc.). Por semejanza, será preferible considerarlos como inversiones e incluirlos en el cálculo de C, que es lo que, por otra parte, hacen los estadísticos.

De este modo, se tenía en 1955 en los Estados Unidos

$C = 1.110,6$  miles de millones de dólares (51),  
de los que corresponden 143,7 miles de millones a los bienes durables de consumo, o sea el 12,9 %.

Si se incluyen en C los bienes durables de consumo, es preciso incluir sus servicios en el cálculo de R. El valor de estos servicios es igual a la suma de las amortizaciones de todos los bienes durables más el interés de su valor global. En un régimen permanente, en nuestras economías, y en primera aproximación, la suma de las amortizaciones equivale al valor global de la producción, efectivamente computada bajo este rubro en el cálculo del ingreso nacional. Procede, pues, simplemente agregar a la estimación habitual del ingreso nacional el interés del valor  $C_c$  de los bienes durables de consumo, tomando

$$(84) \quad R = R' + i C_c$$

en donde  $R'$  representa la estimación habitual del ingreso nacional.

(50) Conviene estudiar, para la estimación de  $i$ , si esta tasa no está artificialmente elevada o disminuída por situaciones inflacionarias o deflacionarias.

(51) Economic Almanac, 1960, p. 389.

## INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

Así pues, para 1955, el ingreso nacional americano se estimó en 330,2 miles de millones de dólares <sup>(52)</sup>.

Tomaremos, por tanto,

$$R = 330,2 + 0,0425 \times 143,7 = 330,2 + 6,1 = 336,3$$

de donde

$$\textcircled{C} = \frac{C}{R} = 3,30$$

En Tabla I doy los valores de  $\textcircled{C}$ , para los Estados Unidos, desde 1880 a 1956. En conjunto, resulta destacable que, para un período del orden de los 75 años, los valores de  $\textcircled{C}$  permanecen sumamente cercanos a su media: 3,48. Para los períodos 1880-1900, 1906-1913, 1923-1937 y 1950-1956, los valores de  $\textcircled{C}$  han sido, respectivamente, 3,63 - 3,40 - 3,56 y 3,35. A despecho de una opinión a menudo expresada, no se advierte tendencia alguna al decrecimiento del coeficiente de capitalización

—  $\frac{C}{R}$  <sup>(53)</sup>.

Debe destacarse el hecho de que este coeficiente tiene, en general, mucho menos variación que la relación entre capital total (incluida la tierra) y el ingreso nacional (Tabla II).

En Tabla VI expongo los valores de  $\textcircled{C}$  para distintos países y diferentes épocas, según COLIN - CLARK en la obra "Conditions of Economic Progress". Aunque los valores sean meramente indicativos, debido al valor muy diferente del material estadístico utilizado y de los métodos empleados, hay un hecho saliente que resalta: en general, se registran las más débiles variaciones de  $\textcircled{C}$  para países y épocas muy distintos, en los que los niveles de vida eran muy diferentes.

(52) Economic Almanac, 1960, p. 392.

(53) Las variaciones que muchas veces se han constatado se debieron, muy a menudo, a la comparación de años en que la situación de la coyuntura fue muy diferente. Me he esforzado, por el contrario, para no considerar sino años en que existieron, al menos en principio, situaciones de pleno empleo.

f) ESTIMACIÓN DIRECTA DE  $\Theta_0$

42. Para estimar  $\Theta_0$  se puede utilizar la relación (G)

$$(G) \quad \Theta_0 = \frac{\Theta}{1 + i\Theta}$$

La estimación de  $\Theta_0$ , depende, de este modo, de la tasa  $i$  de interés, cuya apreciación importa un buen grado de arbitrariedad. Luego, se tiene

$$(85) \quad \frac{\Delta\Theta_0}{\Theta_0} = \frac{i\Theta}{1 - i\Theta} \frac{\Delta i}{i}$$

Como  $i\Theta$  es del orden del 20% (Tablas I y IV), se ve así que un error relativo del 20% en  $i$  se traduce en un error relativo de apenas 5% en  $\Theta_0$ .

La aplicación de esta relación a los valores de  $C$ ,  $R$  e  $i$  de los Estados Unidos para el período 1880-1955, da un valor de  $\Theta_0$  de 4,6 en 1880-1900, de 4,2 en 1906-1913, de 4,5 en 1923-1937 y de 3,9 en 1950-1956 (Tabla I).

Se puede, pues, considerar que entre 1880 y 1955 el valor de  $\Theta_0$  ha sido, en los Estados Unidos, marcadamente estable y del orden de 4,3.

Por último, en 1913, se encuentran para Estados Unidos, Francia y Gran Bretaña los valores 4,34, 4,70 y 4,50 que resultan sumamente próximos si se tienen en cuenta las diferencias en la definición de los conceptos que existen de un país a otro y la imprecisión relativa de los datos estadísticos disponibles. Su media de 4,5 es poco diferente del valor medio 4,29 hallado para los Estados Unidos en el período 1880-1956.

*Matemáticamente*, la estabilidad a través del tiempo de  $\Theta_0$  proviene de las débiles variaciones de  $\Theta$  y de los pequeños valores de la tasa  $i$  de interés. Sin embargo, hemos visto que  $\Theta_0$  es un coeficiente que sólo depende de los aspectos técnicos de la producción, mientras que la tasa de interés  $i$  depende del conjunto de condicio-



nes del equilibrio económico, lo cual nos conduce a interpretar en realidad la *estabilidad de  $\Theta$  como una resultante de la estabilidad de  $\Theta_0$  y de la debilidad de la tasa de interés.*

Si así se considera, los coeficientes

$$(C) \quad \beta(\theta) = \frac{1}{\Theta_0} e^{-\frac{\theta}{\Theta_0}}$$

(relación (C) para  $k = 1$ ) que aparecen en la función general de producción (25), son coeficientes físicos y no dependen más que del parámetro  $\Theta_0$ . Los valores análogos encontrados para  $\Theta_0$  en distintos países y en un momento dado, confirman su carácter de parámetro técnico, y su estabilidad en el tiempo pone en evidencia que la dependencia del ingreso nacional real con relación a los procesos subsidiarios de producción es relativamente estable a través del tiempo y aparece, por lo menos en Estados Unidos desde 1880 hasta 1956, como independiente del estado de la técnica.

Si se reflexiona, esta independencia resulta *mucho menos sorprendente* que lo que podría parecer a primera vista. Ella traduce el siguiente hecho: cualquiera sea el estado de los conocimientos, la disminución de la eficiencia de los factores de la producción —con sus desviaciones en el tiempo— permanece inalterable<sup>(54)</sup>.

Señalemos, por último, que, en el caso más general,  $\Theta$  es una función

$$\Theta = \Theta(i)$$

de  $i$ , de manera que la cuestión de las pequeñas variaciones de  $\Theta$  está estrechamente ligada al problema de las débiles variaciones de  $i$ <sup>(55)</sup>. En el esquema del modelo, la función  $\Theta(i)$  sólo depende del parámetro  $\Theta_0$ , de modo que explicar las pequeñas variaciones de  $\Theta$  se reduce a explicar las pequeñas variaciones de  $\Theta_0$  y de  $i$ . Se puede todavía decir que la explicación de las débiles variaciones de  $i$  se reduce a la explicación de las débiles variaciones de  $\Theta_0$ .

(54) Ver las indicaciones dadas anteriormente en § 33.

(55) Ver "Economie et Intérêt", Cap. IX: El problema del interés.

y de  $\Theta$ . Según numerosos economistas, y es éste mi punto de vista, el deseo de capital no debe ser considerado como un deseo absoluto, sino como un deseo relativo a cierto nivel de ingreso. De allí resulta que la relación  $\frac{C}{R}$  entre el capital total ahorrado y el ingreso, no debe variar mucho, por razones psicológicas evidentes. Debe ocurrir lo mismo para el nivel  $i$  de la tasa del interés, puesto que la propensión al ahorro depende de la tasa del interés y, por consiguiente, de la relación  $\frac{C}{R}$ , relación entre el capital productible y el ingreso nacional. Tales son, siguiendo esta corriente, los motivos por los cuales la relación  $\frac{C}{R}$  mantiene un valor relativamente constante.

No obstante, *la apreciablemente mayor estabilidad del coeficiente  $\frac{C}{R}$ , si se comparan sus variaciones con las de la relación  $C_T/R$  entre el capital nacional total (incluida la tierra) y el ingreso nacional<sup>(56)</sup>, induce a pensar que la razón real de la estabilidad de  $\frac{C}{R}$  es la estabilidad del coeficiente  $\Theta_0$ , asociada a la circunstancia de que el producto  $i\Theta_0$  permanece más o menos pequeño<sup>(57)</sup>.*

g) CONSTANCIA DE LA RELACIÓN  $C/R_0$ .

43. La relación (E) es

$$(E) \quad \frac{C}{R_0} = \Theta_0$$

Ella expresa que la cantidad de capital disponible por unidad de ingreso originario es constante e independiente de la tasa de interés, para un conjunto dado de conocimientos tecnológicos.

(56) Por lo menos para Estados Unidos entre 1880 y 1956 (Tablas I y II).

(57) Ver las indicaciones dadas anteriormente en § 32.

Como sucede en toda economía (58)

$$R = R_w + iC$$

resulta

$$(86) \quad \frac{C}{R_w} = \frac{C}{R - iC} = \frac{\Theta}{1 - i\Theta}$$

Verificar estadísticamente que la relación  $C/R_w$  es una constante  $\Theta$ , equivale, por tanto, a verificar que la relación  $\Theta/(1 - i\Theta)$  es, ella misma, esa constante  $\Theta$ . Esto es lo que efectivamente hemos hecho en el párrafo 42.

El carácter constante de  $C/R_w$  equivale a decir que la relación entre el capital productible disponible por obrero y el salario anual medio es aproximadamente constante. Esto se podría verificar directamente si se dispusiera de estadísticas de salarios *efectivamente* comparables.

#### h) CONFRONTACIÓN DEL MODELO CON LOS TRABAJOS DE DOUGLAS

44. *Para la industria*, DOUGLAS ha encontrado la relación *empírica*

$$(87) \quad P = KL^\lambda C^\mu$$

con

$$(88) \quad \lambda + \mu \neq 1 \quad \mu \neq 0,22$$

en donde P, L y C representan, respectivamente, la producción real, la cantidad de trabajo y el capital real utilizados (59). El valor 0,22

(58) Y no sólo en el modelo (Ver relación (8)).

(59) Ver los estudios citados en la nota del Párrafo 37. Dos tipos de estudio se han hecho. Unos se refieren a series temporales para un país determinado y para un conjunto de industrias; los otros son estudios interindustriales efectuados para una serie de industrias, en una fecha dada. Los primeros proporcionan valores de  $\mu$  cercanos a 0,22, los segundos valores próximos a 0,37 (DOUGLAS, *Are there Laws of Production?*, pág. 12 y 16). A mi criterio, sólo la primera cifra debe ser considerada, pues la segunda tiende a estar artificialmente aumentada a causa de la muy fuerte dependencia que existe, en el caso de un conjunto interindus-

de  $\mu$ , es la media establecida para los Estados Unidos y Australia durante el período 1899-1929.

El hecho que  $\lambda + \mu$  sea apenas diferente de 1 confirma, en el caso de la industria, la hipótesis de homogeneidad que hemos adoptado para el modelo.

Dos cuestiones deben subrayarse:

a) Ante todo, la relación de DOUGLAS es puramente *empírica* y, por consiguiente, sólo es válida *en el entorno* del valor medio de la relación C/L.

b) En segundo lugar, la producción considerada es la *producción bruta y no la producción neta*. No se tiene en cuenta, por tanto, la renovación del capital.

Si se considera, ahora, la producción neta P, es posible aceptar que la función de producción mantiene la forma

$$(89) \quad \bar{P} = K'L^{\lambda}C^{\mu}$$

trial, entre las magnitudes P y L, por motivos que nada tienen que ver con las funciones de producción.

Conocemos en efecto que, en este caso, se ha probado que la productividad P/L de una industria crece aproximadamente como la raíz cuadrada del volumen de la producción (Ley de Verdoorn, Parágrafo 39). Esto no se debe al crecimiento de la productividad imputable a la dimensión del mercado (puesto que no se verifica ninguna correlación positiva entre la productividad y la dimensión de las empresas medida en personal), sino al crecimiento de la demanda, y por tanto de la producción, cuando por una causa cualquiera la productividad es más elevada. Si, en consecuencia, se tiene

$$(1) \quad \frac{P}{L} = K'L^r \quad r \neq \frac{1}{2}$$

Se deberá tener la relación estocástica

$$(2) \quad P = (K'L) \frac{1}{1-r}$$

de donde resulta una tendencia de P a crecer con L que no existiría (al menos en grado comparable) en el caso de las series temporales.

Estas son, por tanto, las series que es necesario considerar para obtener una buena estimación de la constante  $\mu$ .

con

$$(90) \quad \lambda' + \mu' = 1$$

con un coeficiente  $\lambda'$  que será algo más pequeño que  $\lambda$ . Si la amortización  $a$  del capital constituyera una fracción constante de la producción  $P$ , se tendría, rigurosamente,  $\mu' = \mu$ . Si ella fuese una fracción constante del capital  $C$ , se tendría  $\mu' < \mu$ . En definitiva, es lícito pensar que, considerando la producción neta, se tiene

$$\mu' \leq \mu$$

siendo  $\mu'$ , en todo caso, no muy distinto de  $\mu$ .

Si se supone ahora, que la función de DOUGLAS es válida para la producción neta y si se la extrapola al conjunto de la economía, se obtiene, con nuestras notaciones, la relación

$$(91) \quad \bar{R} = KR_e^{\lambda'} \bar{C}^{\mu'}$$

lo que da

$$(92) \quad \bar{R}^{(1-\mu')} = KR_e^{\lambda'} \bar{C}^{\mu'}$$

y aun

$$(93) \quad \bar{R} = K R_e^{\frac{\lambda'}{1-\mu'}} \bar{C}^{\frac{\mu'}{1-\mu'}}$$

Como lo he destacado, esta relación —si es válida— no puede tener más que un significado *puramente empírico*. Por consiguiente, su validez se reduce al entorno del valor  $\bar{C}$  considerado.

Por tanto, no tiene sino un valor diferencial, que debe escribirse bajo la forma:

(94)

$$\frac{d\bar{R}}{\bar{R}} = \frac{\mu'}{1-\mu'} \frac{d\bar{C}}{\bar{C}}$$

*Es ésta la relación que traduce la ley empírica de DOUGLAS*  
 Luego, para  $k=1$ , hemos visto (relación (51))

$$(95) \quad \frac{d\bar{R}}{\bar{R}} = \left( \frac{\Theta_0}{\Theta} - 1 \right) \frac{d\Theta}{\Theta}$$

Debemos, por tanto, tener

$$(96) \quad \frac{\Theta_0}{\Theta} - 1 = \frac{\mu'}{1 - \mu'}$$

o sea, según la relación (G)

$$(97) \quad \frac{i\Theta}{1 - i\Theta} = \frac{\mu'}{1 - \mu'}$$

o aun

$$(98) \quad i\Theta = \mu'$$

Se deduce igualmente de la relación (96)

$$(99) \quad \Theta_0 = \frac{\Theta}{1 - \mu'}$$

Como se tiene, según lo que precede

$$(100) \quad \mu' \leq \mu = 0,22$$

resulta

$$\Theta_0 \leq 1,28 \Theta$$

Como los valores de  $\Theta$  son del orden de 3,5 (Tabla I), se deduce

$$\Theta_0 \leq 4,48$$

Y, si se admite la igualdad, se obtiene un valor de  $\Theta_0$  de 4,48 comparable, a todo efecto, con el valor de  $\Theta_0$  de 4,45 calculado para el mismo período 1880-1937 (§ 42 y Tabla I).

Como los valores de  $\Theta$  están en 3,5 se obtiene, según la relación (98), para  $\mu = 0,22$ , un valor de  $i$  del orden de 6,5 %.

Es éste justamente el orden de magnitud de las tasas que adoptamos para la tasa del interés puro utilizada en los cálculos económicos en el caso de Estados Unidos durante el período 1899-1929 (Tabla I).

i) PERÍODO MEDIO  $\Theta$  Y DURACIÓN MEDIA DE VIDA  $T$  DE LOS BIENES DURABLES

45. La duración media  $\Theta$  es el tiempo medio necesario para que un servicio primario (trabajo o renta inmobiliaria) aparezca en la producción final.

La duración media  $T$  de vida de los bienes durables procede de una definición distinta, puesto que su duración media de vida se calcula a partir del momento en que su producción *termina*. Si, por tanto, se considera el grupo de bienes durables, su duración media  $T$  es ciertamente inferior a la duración  $\Theta'$  que les corresponde<sup>(60)</sup>.

Se tiene pues

$$(101) \quad T < \Theta'$$

La diferencia

$$(102) \quad \Delta = (\Theta' - T)$$

es igual al tiempo *medio* necesario para producir los bienes durables a partir de los servicios originarios. Ella equivale a  $\Theta$  en primera

---

(60) Los bienes durables considerados aparecen en el ingreso nacional bajo la forma de servicios. Si se atiende a estos servicios y a los ingresos originarios que les atañen, se puede hacerles corresponder una duración media  $\Theta'$  por la relación (6).

aproximación, porque  $\Theta$  corresponde a la duración media de producción de todos los servicios, y, como el cálculo de  $\Theta$  tiene en cuenta bienes durables de duración  $\Theta'$  superior a  $\Theta$ , se tiene ciertamente

$$(103) \quad \Theta' - T < \Theta$$

Si se designa por  $\lambda$  la parte del ingreso originario que se utiliza para producir los bienes calificados como durables y si se expresa por  $\Theta''$  el tiempo medio que corresponde al otro grupo de servicios para rematar en un servicio consumible, deberá ser

$$(104) \quad \Theta = \lambda\Theta' + (1 - \lambda)\Theta''$$

#### *Estimación de T*

En 1955, se observa en los Estados Unidos (Economic Almanac 1960):

$$C = 1110,6 \text{ miles de millones de dólares} \quad (\text{pág. 389})$$

producción de bienes durables:

$$\left. \begin{array}{l} \text{—personales : } 39,6 \\ \text{—inversiones : } 69,8 \end{array} \right\} = 103,4 \quad (\text{pág. 400})$$

crecimiento de la riqueza nacional, en valor real:

$$\frac{940,6 - 907,1}{907,1} = 3,7 \% \quad (\text{pág. 389})$$

$$1.110,6 \times 3,7\% = 41,1 \quad (\text{pág. 389})$$

Amortización de los bienes durables:

$$103,4 - 41,1 = 62,3 \text{ miles de millones}$$



## INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

duración media de vida de los bienes durables:

$$T = \frac{1110,6}{62,3} = 17,8 \text{ años }^{(61)}$$

Se tiene, así, según las relaciones (101) y (103) y el valor 3,3 de  $\Theta$  dado en § 41,

$$17,8 < \Theta' < 17,8 + 3,3 = 21,1 \text{ años}$$

### *Estimación de $\lambda$*

$\lambda$  es la fracción de  $R_0$  utilizada para mantener el nivel actual de C. En primera aproximación, esta fracción es igual al porcentaje que alcanza la amortización de los bienes durables con respecto a la producción total, siendo el valor de esta producción total equivalente al producto bruto nacional. Pero el valor de la amortización incluye una parte de intereses que corresponden a la producción de bienes durables. Convendría deducirla. Si no se efectúa esta deducción, se tiene una estimación por exceso.

En los Estados Unidos, para 1955, se registra

G.N.P. <sup>(62)</sup> 397,5 miles de millones de dólares

y, por consiguiente,

$$\lambda < \frac{62,4}{397,5} = 15,70 \%$$

Puede uno hacerse una idea sobre el error cometido al tomar este límite superior como estimación de  $\lambda$ , del siguiente modo:

En el modelo, se tiene en efecto (Relación E)

$$(E) \quad R_0 = R(1 - i\Theta)$$

(61) La relación: duración media de vida igual al cociente entre el valor del capital y la amortización anual es, en régimen permanente, independiente en absoluto de la forma particular de la ley de amortización.

(62) Producto nacional bruto.

Admitiendo esta misma relación para los bienes durables, el término correctivo será  $i\Delta$  y, como  $\Delta$  es 3,3<sup>(63)</sup> e  $i$  es 4,25<sup>(64)</sup>, el término correctivo será del orden del 15%, de donde  $\lambda = 13,7$ .

Es posible, todavía, estimar  $\lambda$  a partir de la composición de la población activa. En 1955 se tenían las siguientes cifras<sup>(65)</sup>

	<i>en millones</i>	<i>en %</i>
Agricultura	6,730	11,8
Industria	16,565	29,2
Minas	0,777	1,4
Construcción	2,759	4,9
Transporte	4,062	7,2
Comercio	13,065	23,0
Servicios	5,916	10,4
Gobierno	6,914	12,1
<b>Total</b>	<b>56,786</b>	<b>100,0</b>

*En primera aproximación*, y aunque una parte de los transportes y del comercio sirven a la producción de bienes durables, se puede admitir que sólo la industria, la minería y la construcción intervienen para producirlos.

Pero sólo una parte de la industria produce bienes durables. De este modo, en 1960<sup>(66)</sup>, sólo una fracción

$$\frac{7,757}{14,576} = 53,2\%$$

de la industria produjo bienes durables, lo que significa un porcentaje:

$$0,532 \times 29,2 = 15,5 \%$$

de la población activa total.

(63) Según lo que antecede.

(64) § 40.

(65) Statistical Abstract 1959, pág. 206 y 210.

(66) Economic Almanac 1960, pág. 339.

Podemos, por tanto, considerar que una parte

$$15,5 + 1,4 + 4,9 = 21,8 \%$$

de la población activa produjo bienes durables, en el año 1955 y en los Estados Unidos.

Hemos visto que el valor de la producción de estos bienes fue de 103,4 miles de millones de dólares, de los cuales se dedicaron 62,3 miles de millones al mantenimiento del nivel actual del capital; ello representa un 60,3 % de la producción de bienes durables. De manera que puede aceptarse que un porcentaje

$$0,603 \times 21,8 = 13,1 \%$$

de la población activa trabajaba en la producción de los bienes durables necesarios para mantener el capital en su nivel presente.

Se reobtiene así, para  $\lambda$ , un orden de magnitud comparable con el anterior.

#### *Estimación de $\theta'$*

Si ahora tomamos

$$\theta' = 19,3 \text{ años}, \quad \lambda = 13,5 \%$$

se halla

$$(105) \quad \theta'' = \frac{\theta - \lambda\theta'}{1 - \lambda} = \frac{3,3 - 2,6}{0,655}$$

o sea

$$\theta'' = 0,82 \text{ años}$$

orden de magnitud que parece completamente verosímil.

Por supuesto que este análisis es del todo independiente de la forma particular de la función característica  $\varphi(\theta, i)$  que se admitió en el modelo.

- j) ESTIMACIÓN DEL NÚMERO  $n$  DE AÑOS AL CABO DE LOS CUALES LOS SERVICIOS QUE CONTRIBUYEN A LA PRODUCCIÓN DE BIENES NO DURABLES QUEDAN PRÁCTICAMENTE AMORTIZADOS

46. Para el ingreso originario  $R_0$  la ley de amortización se define por:

$$(A) \quad \varphi(\theta) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}}$$

(relación A)

Ello implica que, al cabo de  $n$  años, la parte no amortizada sea igual a

$$(106) \quad 1 - \int_0^n e^{-\frac{\theta}{\Theta}} \frac{d\theta}{\Theta} = e^{-\frac{n}{\Theta}}$$

Para los servicios correspondientes a los bienes durables se puede admitir, en forma análoga, que la parte no amortizada al cabo de  $n$  años equivale a  $e^{-\frac{n}{\Theta}}$ . Si al final de los  $n$  años la fracción del ingreso originario que corresponde a los bienes no durables está totalmente amortizada, se tendrá:

$$(107) \quad \lambda e^{-\frac{n}{\Theta'}} = e^{-\frac{n}{\Theta}}$$

de donde

$$(108) \quad n = \frac{L\lambda}{\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta'}}$$

Tomando ahora

$$\lambda = 0,135, \quad \Theta = 3,3, \quad \Theta' = 19,3, \quad n = \frac{2,00}{0,303 - 0,052}$$

o sea

$$n = 7,97 \text{ años}$$

Esta evaluación parece completamente aceptable si se tiene en cuenta que la mínima duración de la vida de los llamados bienes durables, considerados en cuanto tales, es de alrededor de 5 años, a los que es necesario agregar su tiempo medio de producción, del orden de 3,3 años. Se obtiene así una cifra de más o menos 8 años como frontera entre los bienes durables y los no durables. Ello significa que todo servicio que contribuye a la producción de un bien durable no está aún amortizado al cabo de 8 años, mientras que todo servicio que provee a la producción de un bien no durable puede considerarse prácticamente amortizado. (67)

k) PROPORCIÓN DEL INGRESO ORIGINARIO UTILIZADO EN EL INGRESO NACIONAL DEL AÑO

47. La proporción del ingreso originario utilizado en el ingreso nacional del año, se expresa por:

(67) Resulta interesante señalar que, con la ley de amortización (A), el tiempo medio al cabo del cual las sumas no aparecerán en el ingreso nacional sino después de  $n$  años más tarde, es

$$\frac{\int_n^{+\infty} \frac{\theta}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}} d\theta}{\int_n^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\theta}{\Theta}}}{\Theta} d\theta} = (1+n)\Theta$$

$$(109) \quad \int_0^1 e^{-\frac{\theta}{\Theta}} \frac{d\theta}{\Theta} = 1 - e^{-\frac{1}{\Theta}}$$

Para

$$\Theta = 3,3 \text{ se tiene } 1 - e^{-\frac{1}{\Theta}} = 26 \%$$

Se observa que en la descomposición de la población activa se puede, *quizá*, considerar a priori como aproximadamente correspondiente a una actividad consumida de inmediato en el año a la mitad de la agricultura y de los servicios, un tercio del comercio y de los transportes, un décimo de la industria y un cuarto de los servicios del Estado. Su total, entonces es:

$$5,9 + 5,2 + 7,7 + 2,4 + 2,9 + 3,0 = 27,1$$

lo que da un orden de magnitud bastante comparable con la cifra anterior.

Estas consideraciones, así como las de los dos párrafos precedentes, ponen de manifiesto una estrecha relación entre la forma de la función característica de amortización y la composición de la población activa.

#### 1) CORRELACIÓN ENTRE $\bar{R}$ y $\Theta$

48. Para un país con una población  $N$ , y para  $k = 1$ , la relación

$$(H') \quad \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \frac{\Theta_0}{\Theta} e^{1 - \frac{\Theta_0}{\Theta}}$$

da

$$(110) \quad \frac{\bar{R}}{N} = \left[ 1 + L \left( \frac{\Theta_0 \bar{R}_M}{N} \right) \right] \frac{\Theta_0}{\Theta} - L\Theta$$

en donde  $\frac{\bar{R}}{N}$  representa el ingreso real por cabeza.

Esta relación puede todavía escribirse

$$(111) \quad L \frac{\bar{C}}{N} = \left[ 1 + L \left( \frac{\Theta_0 \bar{R}_M}{N} \right) \right] - \frac{\Theta_0}{\Theta}$$

El parámetro  $\Theta_0$  debe ser considerado como una constante para una época dada. El cociente  $R_M/N$ , por el contrario, varía de un país a otro, debido a la acción de otras circunstancias.

De este modo, podría esperarse deducir el valor de  $\Theta_0$  a partir del estudio de la correlación múltiple existente entre  $L(\bar{R}/N)$  y las cantidades  $1/\Theta$  y  $L\Theta$  para diferentes países en una época dada (68).

Si se considerara un mismo país o diferentes países, en distintas épocas, sería preciso tener en cuenta el progreso técnico y escribir

$$(112) \quad \frac{\bar{R}_M}{N} = A e^{\rho t} \quad (69)$$

y no se podría obtener más que un valor medio de  $\Theta_0$ .

(68) o aun la correlación existente entre  $L(\bar{C}/N)$  y  $1/\Theta$ .

(69) Cuando interviene el tiempo, es absolutamente necesario tener en cuenta el progreso técnico.

Desde este punto de vista no se podría deducir, como lo hacen COLIN CLARK ("The economics of 1960", Mac Millan 1944, p. 73), la dependencia del ingreso respecto del capital más allá de la correlación entre el logaritmo del ingreso real por cabeza y el logaritmo del capital real por cabeza, para cierto número de países considerados en épocas diferentes.

Pero el empleo de tal correlación sólo puede conducir a errores. En el gráfico de COLIN CLARK las rectas paralelas a la bisectriz corresponden a valores  $\Theta = C/R$ , que son constantes, y sobre estas rectas solamente actúa el progreso técnico. Se constata efectivamente que, en promedio, sobre una recta de este tipo los logaritmos  $\log C$  y  $\log R$  tienen valores tanto más grandes cuanto más recientes son los años a que ellos corresponden.

Queda pues perfectamente claro que una correlación entre  $\log R$  y  $\log C$  no puede proporcionar una indicación valedera acerca de la in-

Sin embargo, *tales expectativas son absolutamente falaces*. En cada país, el ingreso real por cabeza depende de un gran número de factores distintos del coeficiente de capitalización  $\Theta$ . Ahora bien, estos factores tienen una influencia global considerable, mientras que la influencia del coeficiente  $\Theta$  es relativamente débil, puesto que, para todos los países que poseen buenas estadísticas,  $\Theta$  no es sensiblemente distinto de  $\Theta_0$ , en cuanto  $\bar{R}$  pasa por un máximo para  $\Theta = \Theta_0$ . Esto significa que  $\bar{R}$  varía escasamente con la variación de  $\Theta$ , y  $\Theta$  mismo varía relativamente poco. Hemos visto (relación I) que para  $k = 1$

$$(113) \quad \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} = \frac{\Theta_0 - \Theta}{\Theta} \frac{\Delta \Theta}{\Theta}$$

Se ve así, y por ejemplo, que para  $\Theta_0 = 4,5$ ,  $\Theta = 3,5$ , se tiene

$$(114) \quad \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} = - \frac{1}{12} \Delta \Theta$$

Lo que permite apreciar, para  $\Delta \Theta = 0,5$ , una variación relativa del 4%.

Considerando la escasa precisión con que se conocen los coeficientes de capitalización <sup>(70)</sup> y teniendo en cuenta, además, la influencia de los otros factores sobre el ingreso real por cabeza, influen-

fluencia del capital invertido sobre el ingreso real por cabeza, por cuanto esta correlación está considerablemente influida por la tasa de progreso técnico. Es posible advertir que, aun sin influencia alguna de capital, existiría una fuerte correlación entre  $\log R$  y  $\log C$  puesto que se tendría, término medio,

$$R = R_0 e^{Kt} \quad C = C_0 e^{Kt}$$

siendo  $K$  la tasa del progreso técnico; y, por tanto,

$$\log \frac{C}{R} = \log \frac{C_0}{R_0}$$

(70) Lo menos que puede decirse es que algunos valores dados por Colin Clark son manifiestamente dudosos (Ver Tabla V).



cia que corrientemente significa más de 200% (71), se observa que no quedan esperanzas de obtener directamente la relación que mide la variación del capital real por cabeza en función del coeficiente de capitalización.

Ello no obstante, aunque la relación (113) no pueda ser directamente obtenida, *los datos disponibles permiten, en cambio, demostrar que no hay ninguna influencia importante del coeficiente de capitalización sobre el ingreso nacional real por cabeza. Nadie ha podido ponerla en evidencia a partir del material estadístico que se dispone. Se puede ver en esto una verificación, al menos cualitativa, del modelo que efectivamente prevé una escasísima influencia del carácter más o menos capitalístico de la economía sobre el ingreso real por cabeza, por lo menos en las economías desarrolladas, para las que las tasas  $i$  de interés son muy inferiores al 10%.*

m) CORRELACIÓN ENTRE  $i$  Y  $\Theta$

49. Igualmente, el modelo da la relación

$$(G) \quad i = \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0}$$

que, a su vez, proporciona

$$(115) \quad \Delta i = - \frac{\Delta \Theta}{\Theta^2}$$

La primera relación tiene el inconveniente de hacer intervenir el valor absoluto de la tasa  $i$  de interés puro, cuya medida está viciada de cierta arbitrariedad, pues es difícil apreciar el valor de la prima de liquidez.

La segunda está libre de tal arbitrariedad, mas no parece que la relación (115) pueda verificarse de esta manera, a consecuencia de la poca precisión con que se conocen los coeficientes de capitalización  $\Theta$  y las tasas  $i$  de interés.

(71) Tabla V y Allais: "L'Europe Unie, Route de la Prospérité", Cap. II.

La dificultad radica en el hecho de que para los países respecto de los cuales se dispone de información estadística suficiente, las dos magnitudes  $i$  y  $\theta$  tienen campos de variación muy estrechos, mientras que los posibles errores en los parámetros representan fracciones importantes de estos campos de variación.

Sería en efecto muy interesante disponer, para algunas economías subdesarrolladas, estimaciones conjugadas de  $i$  y de  $\theta$  que puedan ser consideradas valederas. Tal información sería muy valiosa para juzgar plenamente la significación económica del modelo (72).

n) PROPORCIÓN DE LAS RENTAS DE BIENES RAÍCES DENTRO DEL INGRESO ORIGINARIO

50. Es interesante darse cuenta de la variación, a través del tiempo, que experimentan los ingresos fundiarios  $R_\varphi$  (73) dentro del ingreso originario  $R_o$ . Sea  $R_r$  el monto global de la remuneración del trabajo (incluido el de los empresarios). Se tiene

$$(116) \quad R_r + R_\varphi = R_o$$

Pongamos

$$(117) \quad R_\varphi = KR_r$$

y resulta

$$(118) \quad R_\varphi = \frac{K}{1 + K} R_o$$

de donde se obtiene, naturalmente

$$(119) \quad R_\varphi = iC_\varphi$$

(72) En muchas economías subdesarrolladas, numerosos factores socio-lógicos se oponen a que las tasas de interés que corresponderían al equilibrio económico se concreten abiertamente en la realidad. Según lo que se puede juzgar, en estos casos la eficacia marginal del capital es realmente muy elevada.

(73)  $R_\varphi$  representa el monto de las rentas de las tierras.

en donde  $i$  representa la tasa del interés puro.<sup>(74)</sup> y  $C_\varphi$  el valor capitalizado de las rentas fundiarias, es decir, el valor de las tierras consideradas en sí mismo.

Se puede admitir que las rentas fundiarias prácticamente no intervienen mas que en la agricultura, la minería y la construcción; puede también aceptarse, al menos en primera aproximación, que en el conjunto de este sector representan una fracción más o menos constante del ingreso originario.

Entonces, si  $q$  es la proporción de la población activa en agricultura, minería y construcción, y  $K'$  el valor de  $K$  en esos sectores, se tendrá

$$(120) \quad K = qK' \quad K' = R_\varphi / qR_\sigma$$

Puede estimarse que  $K'$  es del orden de 0,3 para cualquier país<sup>(75)</sup>.

Si ahora se considera el capital total (incluso tierras)

$$(121) \quad C_T = C + C_\varphi$$

y la relación

$$(122) \quad \Theta_T = \frac{C_T}{R}$$

se tiene

$$\Theta = (1 + K)\Theta_T - \frac{K}{i}$$

Admitiendo para  $K'$  el valor anterior 0,3, esta relación, junto con la (120), permite deducir aproximadamente el orden de magnitud de  $\Theta$  cuando los datos disponibles sólo proveen  $C_T$ .

(74) Parágrafo 33, más arriba.

(75) Desde 1880 hasta 1956, en los Estados Unidos, (Tabla II) es muy poco lo que este valor ha variado alrededor de 0,3.

El coeficiente  $K'$  ha tomado valores próximos a 0,2 entre 1950 y 1956, pero este descenso de  $K'$  se debe, en lo fundamental, a niveles anormalmente bajos de la tasa de interés.

Así, en un país como la Francia de 1913, se tiene que  $q = 0,5$ , que  $i$  es del orden de  $4,8\%$  y que  $\Theta_r$  es del orden de  $5,5$  (76).

De esto se deduce:

$$\Theta = 1,15 \times 5,5 - \frac{0,15}{0,048} = 6,3 - 3,2 = 3,1$$

que se aproxima bien al orden de magnitud calculado directamente (77).

## VI. JUSTIFICACION GENERAL DEL MODELO

En resumen, el modelo finalmente adoptado ( $k = 1$ ) se justifica por el hecho de que sus hipótesis de partida y, a la vez, sus consecuencias, están de acuerdo con los datos de la observación.

### 1) JUSTIFICACIÓN DEL MODELO POR SUS HIPÓTESIS

51. El modelo indicado se funda en tres hipótesis, sólidamente basadas en la experiencia:

a) La forma linealmente logarítmica de la función de producción responde a los resultados encontrados en todas las investigaciones estadísticas referentes a funciones de producción.

b) La ley de amortización exponencial corresponde a las conclusiones que proveen todas las investigaciones sobre amortización de capitales productibles.

c) La ley de homogeneidad de la función general de producción corresponde a los resultados de las investigaciones relativas a la influencia que tiene la dimensión de los mercados sobre la productividad de las empresas.

### 2) JUSTIFICACIÓN DEL MODELO POR SUS CONSECUENCIAS

52. Las consecuencias verificables del modelo están justificadas por los datos de la observación.

(76) Tablas IV y VI ( $\Theta_r = 3,50 + 1,94 = 5,44$ ).

(77) Tabla IV.

a) El hecho de que el coeficiente  $\Theta_0$  sea un coeficiente que depende sólo de los conocimientos técnicos en un momento dado, y que se tenga

$$\Theta = \frac{\Theta_0}{1 + i\Theta_0}$$

explica la escasa variación de  $\Theta$  de un país a otro, en una época determinada.

b) La débil fluctuación del coeficiente técnico  $\Theta_0$ , en el transcurso del tiempo y su relativa independencia respecto del estado de la técnica, *parece, después de reflexionarse sobre ello, bastante natural*. Por lo tanto, y atendiendo a la misma relación, la débil variación de  $\Theta$  resulta de allí como una simple consecuencia <sup>(78)</sup>.

c) La constancia, que aproximadamente se mantiene de un país a otro, en el valor salarial del capital productible disponible por obrero en un momento dado, viene a confirmar uno de los resultados más notables del modelo.

d) La relación de dependencia hallada entre el ingreso nacional real y el coeficiente de capitalización, parece muy de acuerdo con los resultados empíricos obtenidos por Douglas, en la industria, respecto a la función de producción capitalística.

e) La estimación del número de años al cabo de los cuales los servicios que contribuyen a la producción de bienes no durables quedan prácticamente amortizados, parece conducir a una cifra razonable. Igualmente, la estimación de la proporción de ingreso originario de un año que aparece en el ingreso final de ese mismo año, lleva a un valor análogo al que se puede evaluar, a priori y a grosso modo, partiendo de la composición de la población activa.

## VII. APLICACIONES

La teoría que precede permite realizar algunas aplicaciones particularmente importantes.

(78) Ver parágrafo 41.

a) POSIBILIDAD DE INCREMENTAR EL INGRESO NACIONAL REAL POR CABEZA, POR AUMENTO EN LA INTENSIDAD DE ACUMULACIÓN DE CAPITAL

53. Todos los datos estadísticos que se han examinado conducen a concluir, en las actuales condiciones, que  $\Theta_0$  es del orden de

$$\Theta_0 = 4$$

siendo el año la unidad de tiempo, y se tiene, probablemente,

$$3,8 < \Theta_0 < 4,6$$

Hemos visto (relación 77) que el incremento de ingreso real que puede obtenerse llevando  $\Theta$  al valor,  $\Theta_0$ , óptimo del coeficiente de acumulación de capital, está dado por

$$g = \frac{\Theta}{\Theta_0} e^{\frac{\Theta_0}{\Theta} - 1} - 1$$

de allí se deduce el siguiente cuadro que provee los valores de  $g$  en porcentajes:

$\bar{R} / \bar{R}_M$								
$\Theta_0$	3,8		4		4,2		4,4	
$\Theta$	$g$	$i$	$g$	$i$	$g$	$i$	$g$	$i$
3,6	0,2	1,5	0,6	2,8	1,3	4,0	2,2	5,1
3,4	0,6	3,1	1,4	4,4	2,4	5,6	3,7	6,7
3,2	1,6	4,9	2,7	6,3	4,2	7,4	5,8	8,5
3,0	3,1	7,0	4,7	8,3	6,6	9,5	8,7	10,6
2,5	10,7	13,7	13,9	15,0	17,5	16,2	21,5	17,3
2,0	29,5	23,7	35,9	25,0	43,1	26,2	50,9	27,3
1,5	82,9	40,4	98,6	41,7	116,0	42,9	135,8	43,9
1,0	332,8	73,7	402,1	75,0	484,1	76,2	581,1	77,3
0,5	957,4	173,7	1360,8	175,0	1938,5	176,2	2762,5	177,3

El ingreso nacional real es máximo para  $\Theta = \Theta_0$ .

A título ilustrativo, he indicado en cada caso el valor de la eficacia marginal del capital, expresado por la relación (G)

$$(G) \quad i = \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0}$$

Se ve que en una situación inicial como la de Estados Unidos en 1956, en la que el coeficiente de acumulación de capital es más o menos 3,3, uno ya se encuentra muy cerca del máximo realizable; y también se observa que para el valor correspondiente 3,9 de  $\Theta_0$  el incremento posible no es más que del orden de 1,5%. Para los valores medios  $\Theta = 3,5$  y  $\Theta_0 = 4,3$  de  $\Theta$  y de  $\Theta_0$  en los Estados Unidos entre 1880 y 1956 (Tabla I), este incremento sería más elevado, pero de todos modos no excedería el 2%, aproximadamente (79).

Lo mismo sucede en la mayor parte de las economías occidentales. Los valores que allí se obtienen para el coeficiente de acumulación de capital pueden ser todos considerados como correspondiendo a una situación de máximo.

Aun en el caso de economías en que el coeficiente de acumulación de capital no sobrepasa a 2, el aumento de ingreso real que puede ganarse por prolongación de los procesos productivos, en el caso  $\Theta_0 = 4$ , es sólo del 36%, con una eficacia marginal del capital del 25%.

Sólo para los coeficientes de capital inferiores a 1,5, esto es, muy pequeños, los incrementos del ingreso real pueden alcanzar valores muy apreciables, pero en la totalidad de los casos en que se poseen estimaciones no se encuentran valores tan débiles.

En anexos B III a B VI doy ábacos que proporcionan, para diferentes valores de  $\Theta_0$ , las variaciones de  $\bar{R} / \bar{R}_M$  en función de  $\Theta$  y de  $i$ , así como los valores del incremento  $g$  en función de estos dos parámetros.

(79) Sólo podría ser de otra manera si, suponiendo válida la representación por el modelo, el coeficiente  $\Theta_0$  registrara valores mucho más altos, lo que no parece admisible en absoluto.

De cuya consideración claramente resulta:

1º) *que los países económicamente evolucionados tienen relativamente poco que ganar a partir de un suplemento de ahorro.*

2º) *que los países económicamente rezagados pueden por el contrario, obtener incrementos sustanciales del ingreso mediante un intenso esfuerzo de ahorro, a condición de que la eficacia marginal del capital sea en ellos particularmente elevada.*

#### *Significado de los resultados obtenidos*

54. De este modo se advierte que los incrementos del ingreso real que pueden obtenerse mediante la prolongación de la duración media de los procesos capitalísticos, son, por lo general, considerablemente sobrestimados.

*Sin embargo, en esta interpretación, una hipótesis esencial del modelo merece recordarse. Es la que supone que todas las situaciones consideradas corresponden a un óptimo de gestión, y ello implica utilizar de la mejor manera posible el ahorro acumulado existente.*

En tales condiciones, aunque los resultados obtenidos pueden demostrar que un ahorro accesorio rinde poco, cuando se ha alcanzado un óptimo de gestión, ellos en manera alguna significan que un ahorro accesorio no sea muy productivo, si, en el pasado, el ahorro acumulado fue invertido en direcciones erróneas.

En este caso un nuevo incremento de ahorro podrá rendir importantes efectos benéficos. Pero la causa de ello no será la insuficiencia del volumen global de ahorro acumulado, sino su defectuosa utilización en forma de inversiones económicamente equivocadas.

*En tal situación, no es el volumen global del ahorro lo que se discute, sino su empleo en forma de inversiones improductivas de capital.*

*En consecuencia, una productividad media insuficiente se explica por la ineficacia de la gestión y no por la intensidad de acumulación de capitales (80).*

(80) Ver mi trabajo "L'Europe Unie, Route de la Prospérité" (Calmain Lévy, 1960) Cap. II pp. 28 a 38 y 42 a 51, y Apéndice I C, pp. 295 a 297.



Se ve así que lo importante es, esencialmente, el uso que se hace del ahorro acumulado, y no su volumen evaluado en años de ingreso nacional, que no varía mucho de un país a otro (aun en los países subdesarrollados).

b) POLÍTICA DE DESARROLLO DE CAPITAL

55. Hemos visto que el modelo implicaba la relación (E)

$$(E) \quad C = \Theta_0 R_0$$

que aparenta ser paradójica, pero que en el actual estado de nuestra información parece verificarse a partir de las estadísticas disponibles.

Como vimos, esta relación significa —económicamente— que el valor salarial del capital productible no depende del carácter más o menos capitalístico de los procesos de producción, tal como lo caracteriza el coeficiente  $\Theta$ . Este valor salarial del capital disponible es independiente de la tasa  $i$  de interés.

Ello significa que, evaluado en horas de trabajo, el capital disponible por cabeza de las economías llamadas subdesarrolladas presenta valores comparables con los de las economías avanzadas <sup>(81)</sup>.

O sea que *el capital acumulado no pesa en las economías avanzadas más fuertemente que en las subdesarrolladas.*

Esta constatación pone de manifiesto que en toda política de desarrollo existe, siempre que ello sea posible, interés en utilizar las técnicas de producción más eficaces. La finalidad de tal política será el mantenimiento de la tasa de interés en niveles suficientemente bajos como para que puedan emplearse las técnicas más indirectas.

Sin embargo, surge claramente de lo que precede que el carácter más o menos capitalístico de los procesos de producción ( $\Theta$  más o menos grande) no basta para explicar las diferencias en las tasas de productividad.

(81) Ver párrafo 43.

Por lo tanto, *no bastaría con realizar en Europa —o en Africa y en Asia— inversiones de capital completamente análogas a las americanas, si no se remedian, al mismo tiempo, los restantes factores que debilitan la productividad; si esta condición no se satisface, las economías consideradas no podrán afrontar, llegado el momento, la renovación de los bienes de capital muy perfeccionados que deberán introducirse.*

El capital francés de 1954, evaluado en años de ingreso nacional, fue de una magnitud similar al de los Estados Unidos. Sin embargo, en cantidad física fue alrededor de 2,4 veces mayor. Este hecho se debía a que, *por otros motivos*, la productividad media por hora de trabajo en los Estados Unidos era 2,4 veces más alta que en Francia (82). Si, entonces, se trasplantaran bruscamente a Francia las técnicas de producción americanas —lo que exigiría enormes inversiones— y si paralelamente no se remediaran las actuales causas de inferioridad, la economía francesa no sería capaz de renovar totalmente las inversiones realizadas en la medida de su desgaste y de su obsolescencia.

c) PROGRESO DE UNA ECONOMÍA SUBDESARROLLADA, EN EL CASO EN QUE LA INVERSIÓN NETA SEA UN PORCENTAJE CONSTANTE DEL INGRESO NACIONAL

56. Es interesante ilustrar las posibilidades de crecimiento del ingreso real, por ampliación de los procesos de capitalización, que se ofrecen cuando la inversión neta es igual a una fracción determinada del ingreso nacional.

Supongamos que efectivamente se tenga:

$$(H'') \quad \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \frac{\Theta_0}{\Theta} e^i - \frac{\Theta_0}{\Theta}$$

(82) Allais, "L'Europe Unie, Route de la Prospérité", pp. 29 a 32.

y que cada año la inversión real neta sea una porción constante del ingreso nacional real. Esto significa que se tendrá

$$(124) \quad \frac{d\bar{C}}{dt} = \gamma \bar{R}$$

donde  $\bar{R}$  y  $\bar{C}$  simbolizan el ingreso y el capital reales. Resultará entonces

$$(125) \quad \frac{d\bar{C}}{\bar{C}} = \gamma \frac{\bar{R}}{\bar{C}} dt$$

Ahora bien, al menos en primera aproximación es

$$(126) \quad \frac{\bar{C}}{\bar{R}} = \frac{C}{R} = \Theta$$

A partir de (H') se deduce.

$$(127) \quad \bar{C} = \bar{R}_M \Theta_0 e^{1 - \frac{\Theta_0}{\Theta}}$$

De (125), teniendo en cuenta (126) y (127), resulta

$$(128) \quad \frac{\Theta_0}{\Theta^2} d\Theta = \frac{\gamma}{\Theta} dt$$

de donde

$$(129) \quad \frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{\gamma}{\Theta_0} dt$$

y, por consiguiente,

$$(130)$$

$$\Theta = \Theta_1 e^{\lambda t}$$

con

$$(131) \quad \lambda = \frac{\gamma}{\Theta_0}$$

$\Theta_0$ , representa el valor inicial de  $\Theta$  en la economía considerada.

También puede escribirse

$$(132) \quad \frac{\bar{R}}{\bar{R}_1} = \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta} e^{\left[ \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_1} \right]}$$

con

$$(133) \quad \frac{\bar{C}}{\bar{C}_1} = \frac{\bar{R}}{\bar{R}_1} \frac{\Theta}{\Theta_1}$$

En el momento  $t$ , la tasa de crecimiento está dada por la igualdad

$$(134) \quad \rho = \frac{1}{\bar{R}} \frac{d\bar{R}}{dt} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d\Theta}{dt} + \frac{\Theta_0}{\Theta^2} \frac{d\Theta}{dt}$$

o sea

$$(135) \quad \rho = \left( \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0} \right) \gamma$$

o sea, todavía,

$$(136) \quad \rho = i \gamma$$

Resulta, pues, que, en cada momento del tiempo, la tasa de crecimiento es una fracción de la tasa de inversión.

En los países occidentales, donde la tasa de interés que se emplea en el cálculo de las inversiones varía entre 5% y 10%, la tasa de crecimiento debido a la capitalización estará comprendida entre

un vigésimo y un décimo del valor de la tasa de inversión neta, la cual, a su vez, oscilará entre un 10% y un 20%, a lo sumo.

A la inversa, en países en que la tasa de interés de equilibrio fuera mucho más elevada, por ejemplo 25% anual, lo que para  $\Theta_0 = 4$  correspondería a  $\Theta = 2$ , la tasa de crecimiento  $\rho$  podría alcanzar la cuarta parte de la tasa  $\gamma$  de capitalización.

Sea, ahora,  $\Theta_2$  el valor de  $\Theta$  que corresponde a una situación en que el aumento del ingreso que puede lograrse llevando  $\Theta$  a su valor óptimo  $\Theta_0$ , no es más que del 2,5%.

El tiempo necesario que debe transcurrir para alcanzar el valor  $\Theta_2$ , partiendo de  $\Theta_1$ , es

$$t = \frac{\Theta_0}{\gamma} L \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$$

Para  $\Theta_0 = 4$  se tiene  $\Theta_2 = 3,3$  <sup>(83)</sup>

Si se supone ahora  $\Theta_1 = 2$  <sup>(84)</sup> y  $\gamma = 15\%$  <sup>(85)</sup>, se tiene

$$t = \frac{4}{0,15} L \frac{3,3}{2} = \frac{4}{0,15} \times 0,50 = 13,3 \text{ años}$$

Resulta entonces

$$\frac{\bar{R}_2}{\bar{R}_1} = 1,32$$

En este caso, se precisan quince años para aumentar el ingreso real en un tercio.

(83) Abaco B V.

(84) Este es el caso de países como Chile ( $\Theta = 1,90$  en 1950) o Brasil ( $\Theta = 2,5$  en 1940) (Tabla A V).

(85) En 1955, como se ha visto anteriormente (parágrafos 41 y 45), la inversión nacional neta en los Estados Unidos representó una fracción  $41,1/336,3 = 12,2\%$  para una población creciente (1,7% anual) y donde el incremento de productividad debido al progreso técnico fue del orden de 2,5% anual (Allais, "L'Europe Unie, Route de la Prospérité", Apéndice III).

Con  $\Theta_0 = 4$ ,  $\Theta_1 = 1$  <sup>(86)</sup> y  $\gamma = 10\%$ , se encuentra

$$t = \frac{4}{0,1} \ln 3,3 = \frac{4}{0,1} \cdot 1,19 = 47,6 \text{ años}$$

con

$$\frac{\bar{R}_2}{\bar{R}_1} = 4,88$$

De este modo, son necesarios cincuenta años para incrementar el ingreso nacional real en algo así como 400%; pero este caso es completamente irreal, porque los valores de  $\Theta$  menores de 2 no se encuentran nunca en la práctica.

Puede apreciarse así la magnitud del tiempo necesario para alcanzar prácticamente una acumulación óptima de capital, partiendo de situaciones más o menos alejadas de ese óptimo.

Este tiempo es relativamente corto en todos los casos en que el coeficiente  $\Theta$  es mayor de 2 <sup>(87)</sup>, cosa que por lo general sucede.

Pese a todo, el coeficiente de acumulación de capital es sólo un elemento entre tantos otros que explican las extraordinarias diferencias de niveles de vida y de productividad que existen actualmente en el mundo.

En anexos B VII y B VIII proporciono gráficos que muestran el progreso, en orden a la capitalización, de una economía, para valores del coeficiente  $\gamma$  iguales a 10% y a 15%.

#### RESUMEN

1. Se propone un modelo que procura poner de manifiesto la dependencia, en régimen permanente, del ingreso nacional real res-

(86) Estos valores corresponden a una tasa

$$i = \frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_0} = 1 - 0,25 = 75\% \text{ anual}$$

valor de la tasa de interés puro que, prácticamente jamás se presenta.

(87) Tabla V.

pecto del coeficiente de acumulación de capital  $\gamma = C/R$ , en donde  $C$  expresa el valor del capital nacional productible y  $R$  el ingreso nacional.

2. El modelo se apoya en tres hipótesis

*Hipótesis (a).* Linearidad logarítmica de la función global de producción.

$$L\bar{R} = L\alpha + kLR_0 + \int_0^{+\infty} \beta(\theta) L\varphi(\theta, i) d\theta$$

con

$$k = \int_0^{\infty} \beta(\theta) d\theta$$

El ingreso originario  $\bar{R}_0$  representa el valor global de los servicios del trabajo y de las riquezas naturales (Salarios + rentas fundiarias) por unidad de tiempo.  $R_0\varphi(\theta, i)d\theta$  representa la parte del ingreso originario gastada en el período  $(t-\theta, t-\theta + d\theta)$  que contribuye al ingreso nacional  $\bar{R}$  del momento  $t$ .

La cantidad

$$\textcircled{a} = \frac{\int_0^{+\infty} \theta\varphi(\theta, i) d\theta}{\int_0^{+\infty} \varphi(\theta, i) d\theta}$$

representa el período medio de producción. La tasa  $i$  es la tasa del interés puro.

*Hipótesis (b).* Decrecimiento exponencial a través del tiempo de la función característica  $\varphi(\theta, i)$  (ley de amortización exponencial).

$$\varphi(\theta, i) = A(i) e^{-B(i)\theta}$$

*Hipótesis (c).* Homogeneidad de la función global de producción

$$k = 1$$

3. Cuando la hipótesis (a) se verifica, la hipótesis (b) es equivalente a la siguiente hipótesis (b'), y recíprocamente.

*Hipótesis (b')*. Decrecimiento exponencial de las elasticidades de producción

$$\beta(\theta) = \frac{k}{\Theta_0} e^{-\frac{\theta}{\Theta_0}}$$

4. *Consecuencias de las tres hipótesis (a), (b) y (c) (o de las tres hipótesis alternativas (a), (b') y (c)).*

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0} \\ \varphi(\theta, i) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\theta}{\Theta}} \quad \text{ó} \quad \varphi(\theta, i) = \frac{1 + i\Theta_0}{\Theta_0} e^{-(1 + i\Theta_0)\frac{\theta}{\Theta_0}} \\ \frac{C}{R} = \Theta \quad \quad \quad \frac{C}{R_{\Theta_0}} = \Theta_0 \\ R = \frac{R_{\Theta_0}}{1 - i\Theta} \\ \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \frac{\Theta_0}{\Theta} e^{1 - \frac{\Theta_0}{\Theta}} \quad \text{ó} \quad \frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = (1 + \Theta_0 i) e^{-\Theta_0 i} \end{array} \right.$$

Se ha realizado la extensión de estas conclusiones para el caso en que  $k$  es distinto de uno.

5. El ingreso nacional real  $\bar{R}$  alcanza un máximo para  $i = 0$ , en cuyo caso es  $\Theta = \Theta_0$ . Este resultado ha sido comentado.

6. Tanto las hipótesis como las consecuencias del modelo parecen compatibles con todos los datos estadísticos conocidos.

7. Se han hecho aplicaciones (§ 53 — 56 y Anexo B).



INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

ANEXO A I

TABLA I

COEFICIENTE DE ACUMULACION DE CAPITAL EN  
ESTADOS UNIDOS

de 1880 a 1956

	<i>C</i>	<i>R'</i>	<i>i'</i> en %	<i>⊙'</i>	<i>Cc</i>	<i>i</i> en %	<i>R</i>	<i>⊙</i>	<i>i⊙</i>	<i>⊙<sub>o</sub></i>
1880	24,7	7,7	5,47	3,20	2,3	6,47	7,9	3,13	0,203	3,93
1890	43,3	10,9	4,68	3,97	4,4	5,68	11,2	3,87	0,220	4,96
1900	59,1	15,7	4,18	3,76	6,0	5,18	16,0	3,69	0,191	4,56
Período 1880-1900 Medias			4,78	3,64		5,78		3,56	0,205	4,48
1906	83,6	24,3	4,56	3,44	9,3	5,56	24,8	3,37	0,187	4,15
1910	99,6	28,8	4,81	3,46	11,3	5,81	29,5	3,38	0,196	4,20
1913	113,8	32,2	5,06	3,53	14,4	6,06	33,1	3,44	0,208	4,34
Medias	Período 1906-1913		4,81	3,48		5,81		3,40	0,197	4,23
	Período 1880-1913		4,80	3,56		5,80		3,48	0,201	4,36
1923	253,4	73,7	5,57	3,44	33,5	6,57	75,9	3,34	0,219	4,28
1929	313,2	87,8	5,48	3,57	42,2	6,48	90,5	3,46	0,224	4,46
1937	291,8	73,6	4,15	3,96	30,8	5,15	75,2	3,88	0,200	4,85
1950-1937 Medias			5,07	3,66		6,07		3,56	0,214	4,53
1950	836,9	241,9	2,86	3,46	109,2	3,86	246,1	3,40	0,131	3,91
1955	1110,6	330,2	3,25	3,36	143,7	4,25	336,3	3,30	0,140	3,84
1956	1199,6	350,8	3,57	3,42	153,6	4,57	357,8	3,35	0,153	3,96
Medias	Período 1950-1956		3,23	3,41		4,23		3,35	0,141	3,90
	Período 1880-1956		4,47	3,54		5,47		3,46	0,189	4,29
<i>s</i> : Desvío medio relativo			16%	5%		13%		5%	13%	7%

NOTAS

- (1) Los años utilizados han sido, en la medida de lo posible, años de pleno empleo.
- (2) Se ha tomado  $i = i' + 1\%$ , en donde  $i'$  representa la tasa media de interés de las obligaciones.
- (3) Se tomó  $R = R' + iC_c$ , en donde  $C_c$  expresa el valor de los bienes durables de consumo.

$$(4) \quad \textcircled{0}' = \frac{C}{R'} ; \textcircled{0} = \frac{C}{R}$$

$$(5) \quad \text{Se tiene } \textcircled{0}_0 = \frac{\textcircled{0}}{1 - i\textcircled{0}}$$

(6)  $\varepsilon$  = media en % de los desvíos de los 12 valores con respecto a su media general.

(7) *Valores de  $C$ ,  $C_c$  y  $C_y$* : antes de 1896, GOLDSMITH, *The growth of reproducible Wealth of the U.S.A. desde 1805 a 1950, Income and Wealth of the United States, Trends and Structure Series II* — Bowes and Bowes, 1952, p. 306; después de 1896, *National Balance Sheets and National Wealth Statements 1896 a 1949. A study of Saving in the United States*, Princeton University Press, 1956, p. 14 (la mayor parte de estos valores están dados en *Economic Almanac 1960*, p. 389).

(8) *Valores del ingreso nacional  $R'$* : para 1929 y 1950 a 1956, *Economic Almanac 1960*, National Income, p. 392; para 1900 a 1923 y 1937, *idem* p. 410; para 1880 y 1890, *idem* p. 398, los valores 7,227 y 10,70 para 1879 y 1889 han sido multiplicados por 15,647/16,158 (refiriendo los valores a 1900) para hacerlos comparables con los precedentes. Para obtener los valores de 1880 y 1890 he, además, multiplicado por 1,057, considerando así la tendencia al crecimiento del valor real del ingreso nacional (Allais) y por 82/77 y 78/77, teniendo en cuenta el alza general de precios (*Historical Statistics, 1789-1945*, p. 231).

(9) *Valores de  $i'$* : para 1950 a 1956, *Economic Almanac 1960*, p. 80, Bond Yields (promedio general); antes de 1950, Macaulay (F. R.) *Bond Yields Interest rates, Stock Prices, National Bureau of Economic Research, 1938*, Apéndice A 142, Col. 5 (Adjust. Bonds). Estos valores han sido incrementados en un 1% para hacerlos comparables con los precedentes.

COMENTARIOS

- (1) Los cuatro valores de  $\textcircled{0}$  encontrados: 3,56 — 3,40 — 3,56 y 3,35, para los cuatro periodos elementales considerados, son notablemente cercanos y no revelan ninguna variación sistemática respecto a su media general 3,46.
- (2) Igual cosa sucede con los cuatro respectivos promedios hallados para  $\textcircled{0}_0$ : 4,48 — 4,23 — 4,53 y 3,90, los que están relativamente próximos y varían en forma no sistemática alrededor de su media general 4,29. El valor un tanto más pequeño de la última cifra, debe atribuirse a la anormal debilidad de la tasa  $i$  durante el periodo 1950-1956. La tasa  $i'$ , en efecto, pasó de 2,86% en 1950 a 4,69% en junio de 1959, tendiendo así a retornar a su nivel medio de periodos anteriores.

ida de lo posible, años de  
representa la tasa media  
resa el valor de los bienes

valores con respecto a su

GOLDSMITH, The growth of  
le 1805 a 1950, Income and  
nd Structure Series II —  
de 1896, National Balance  
1896 a 1949. A study of  
niversity Press, 1956, p. 14  
ados en Economic Almanac

29 y 1950 a 1956, Economic  
para 1900 a 1923 y 1937,  
8, los valores 7,227 y 10,70  
por 15,647/16,158 (refirien-  
comparables con los prece-  
y 1890 he, además, multi-  
ndencia al crecimiento del  
y por 82/77 y 78/77, te-  
cios (Historical Statistics,

omic Almanac 1960, p. 80,  
de 1950, Macaulay (F. R.)  
, National Bureau of Eco-  
, Col. 5 (Adjust. Bonds).  
un 1% para hacerlos com-

3,56 — 3,40 — 3,56 y 3,35,  
siderados, son notablemente  
n sistemática respecto a su  
ectivos promedios hallados  
os que están relativamente  
tica alrededor de su media  
equeño de la última cifra,  
e la tasa  $i$  durante el perio-  
de 2,86% en 1950 a 4,69%  
ornar a su nivel medio de

ANEXO A II

TABLA II  
DATOS SOBRE LA ESTRUCTURA CAPITALISTICA DE LOS ESTADOS UNIDOS  
de 1880 a 1956.

	C	$C_{\varphi}$	$C_{\gamma}$	$\frac{C_{\varphi}}{C_{\gamma}}$	$\frac{C_{\varphi}}{C}$	R	$\frac{C}{R}$	$\frac{C_{\gamma}}{R}$	$i$	$iC_{\varphi}$	$i_{\Theta}$	$R_{\sigma}$	$R_{\sigma}$	$K = R_{\varphi}/R_{\sigma}$	$\frac{R_{\varphi}/R_{\sigma}}{1+K}$	q (3)	$\frac{1}{q} \frac{C_{\varphi}}{C}$	$\frac{K-K q}{qR_{\sigma}}$
1880	24,7	14,7	39,4	0,373	0,596	7,9	3,13	4,99	6,47	0,95	0,203	6,3	5,3	0,179	0,152	56,6	1,053	0,316
1890	43,3	—	—	—	—	11,2	3,87	—	5,68	—	0,220	—	—	—	—	51,6	—	—
1900	59,1	30,9	90,0	0,343	0,523	16,0	3,69	5,63	5,18	1,60	0,191	12,9	11,3	0,142	0,124	46,6	1,122	0,305
Período 1880-1900 Medias							3,56	5,31	5,78		0,205						1,088	0,311
1906	83,6	45,2	128,8	0,351	0,541	24,8	3,37	5,19	5,56	2,51	0,187	20,2	17,7	0,142	0,124	43,1	1,255	0,330
1910	99,6	54,5	154,1	0,354	0,547	29,5	3,38	5,22	5,81	3,17	0,196	23,7	20,5	0,155	0,134	40,8	1,341	0,380
1913	113,8	60,2	174,0	0,346	0,529	33,1	3,44	5,25	6,06	3,65	0,208	26,2	22,5	0,162	0,139	38,9	1,360	0,416
Período 1906-1913 Medias							3,40	5,22	5,81		0,197						1,319	0,375
Período 1880-1913 Medias							3,48	5,26	5,80		0,201						1,226	0,350
1923	253,4	95,4	348,8	0,274	0,376	75,9	3,34	4,60	6,57	6,27	0,219	59,5	53,0	0,118	0,106	33,4	1,126	0,353
1929	313,2	113,5	426,7	0,266	0,362	90,5	3,46	4,71	6,48	7,35	0,224	70,2	62,8	0,117	0,105	31,0	1,168	0,378
1937	291,8	87,9	379,7	0,231	0,301	75,2	3,88	5,05	5,15	4,53	0,200	60,2	55,7	0,081	0,075	27,2	1,107	0,298
Período 1923-1937 Medias							3,56	4,79	6,07		0,214						1,154	0,343
1950	836,9	175,4	1012,3	0,173	0,210	246,1	3,40	4,11	3,86	6,77	0,151	213,9	207,1	0,033	0,032	17,9	1,173	0,184
1955	1110,6	215,9	1324,5	0,161	0,193	336,3	3,30	3,94	4,25	9,09	0,140	289,2	280,1	0,052	0,031	16,3	1,184	0,196
1956	1199,6	230,7	1430,3	0,161	0,192	357,8	3,35	4,00	4,57	10,54	0,153	303,1	292,6	0,036	0,035	15,9	1,208	0,226
Medias Período 1950-1956							3,35	4,01	4,23		0,141						1,188	0,202
Medias Período 1880-1956							3,46	4,79	5,47		0,189						1,191	0,307
Desvío medio relativo							5%	9%	13%		13%						6%	19%

FUENTES:  
Tabla I y fuentes de la tabla I.

INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

NOTAS

- (1)  $C_p = C + C_p$ ;  $R_a = R(1 - i_a)$ ;  $R_p = iC_p$ ;  $R_c = R_a - R_p$
- (2)  $q$  es la proporción de la población activa en la agricultura, la minería y la construcción.
- (3) Valor de  $q$ : de 1880 a 1940; *Historical Statistics*, p. 64. Los porcentajes de los años en que no había datos, fueron interpolados linealmente.  
De 1950 a 1956: *Economic Almanac*, p. 335, 337. Sin embargo estas cifras no son estrictamente comparables con las de los años precedentes.

En el cuadro que sigue se dan las cifras, en millones:

	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1955	1956	
Población activa	17,390	23,720	29,070	36,720	41,610	47,400	53,300	59,748	62,944	64,708	
Agricultura	8,570	10,170	10,950	11,350	10,680	10,180	9,000	7,497	6,718	6,572	
Explotaciones forestales y pesca	0,095	0,180	0,210	0,250	0,280	0,120	0,140	—	—	—	
Minería	0,320	0,470	0,750	1,060	1,230	1,160	1,110	0,889	0,777	0,807	
Industria	3,210	4,620	6,250	8,250	10,890	10,770	11,940	14,967	16,563	16,903	
Construcción	0,850	1,400	1,640	2,310	2,190	3,030	3,510	2,333	2,759	2,929	
Transporte	0,850	1,470	2,020	3,200	4,200	4,810	4,150	3,977	4,062	4,161	
Comercio y finanzas	1,280	2,060	2,870	4,040	4,940	7,660	8,730	11,469	13,065	13,529	
Servicios y gastos gubernamentales	2,140	3,240	4,220	5,960	6,540	9,530	11,400	11,105	12,830	13,437	
Agric. Minería y construcción	En valor absoluto	9,835	12,220	13,550	14,970	14,380	14,490	13,760	10,719	10,254	10,308
	%	56,6	51,6	46,6	40,8	34,6	30,6	25,8	17,9	16,3	15,9

- (4) *Desvío medio relativo*: es la media, en %, de los desvíos relativos de los 12 valores con respecto a la media general del período 1880-1956.

COMENTARIOS

- (1) La proporción  $C_p/C$ , del capital inmobiliario respecto del capital total, ha decrecido constantemente desde 1880 a 1956, cayendo de 37% a 16%.
- (2) La relación  $C_p/R$  es más variable que  $C/R$ . En efecto, el desvío medio relativo es sólo del 5% para  $C/R$ , mientras que alcanza al 9% para  $C_p/R$ .
- (3) La proporción  $R_p/R_a$  de las rentas inmobiliarias en el ingreso originario ha decrecido constantemente desde 1880 hasta 1956, bajando de 15% a, más o menos, 3,5%.
- (4) Sin embargo, la relación  $K' = R_p/qR$ , de las rentas inmobiliarias con respecto al total de salarios de la agricultura, la minería y la construcción, ha variado poco alrededor de su media del 30%. Los valores de esta relación para el período 1950-1956, deben considerarse anormalmente bajos, como consecuencia de las cifras anormalmente débiles de la tasa de interés.

Advertimos, examinando los valores de la relación  $C_p/qC$ , que ellos varían mucho menos que los de  $R_p/qR$ .

TABLA III  
COMPOSICION DEL CAPITAL DE EE. UU. EN 1956  
(en miles de millones de dólares)

Capital productible			
	Estructuras		
	—no agrícolas	350,1	
	residenciales		
	no residenciales	151,7	
	<b>Total</b>		501,8
	—agrícolas		34,3
	—Gubernamentales		137,3
	—Otras		48,3
	<b>Total</b>		721,7
	Bienes de capital		
—Bienes durables de producción		177,6	
—Bienes durables de consumo		153,6	
<b>Total</b>		331,2	
Stocks			
—no agrícolas		95,0	
—Otros		25,3	
<b>Total</b>		120,3	
<b>TOTAL</b>			1.199,6
Capital no productible (tierras)			
	Agricultura y forestación	86,2	
	Capital no agrícola	105,4	
	Capital público	39,1	
	<b>TOTAL</b>		230,7
<b>CAPITAL TOTAL</b>			1.430,3

Fuentes: R. W. GOLDSMITH, National Bureau of Economic Research, *Economic Almanac*, 1960, p. 389.

#### COMENTARIOS

- (1) Las estructuras están constituidas por las instalaciones fijas: rutas, puertos, aerodromos, construcciones; con exclusión de equipos (máquinas, herramientas, etc.).

TABLA IV

VALOR DEL COEFICIENTE DE ACUMULACION DE CAPITAL EN 1913,  
PARA ESTADOS UNIDOS, FRANCIA Y GRAN BRETAÑA

	C	R'	i' en %	⊙'	C <sub>c</sub>	i en %	R	⊙	i⊙	⊙ <sub>0</sub>
Estados Unidos	113,8	32,2	5,06	3,53	14,4	6,06	33,1	3,44	0,208	4,34
Francia	191,0	48,9	3,84	3,91	20,0	4,84	49,9	3,83	0,185	4,70
Gran Bretaña (1914)	9138,5	2450	4,00	3,73	808,5	5,00	2490,4	3,67	0,184	4,50
Medias			4,30	3,72		5,30		3,64	0,192	4,51
Desvío medio relativo			12%	3%		12%		4%	5%	3%

## NOTAS

(1) Las fórmulas utilizadas son las que se citan en las notas (2) a (5) de la Tabla I.

(2) *Estados Unidos*: ver Tabla I.

(3) *Francia*: a) C y C<sub>c</sub>: Colson, *Cours d'Economie Politique*, T. III, Gauthier Villars, 1918, p. 362. Para la riqueza nacional total (incluidas las tierras) Colson da 261 miles de millones. De allí, para tener en cuenta las tierras, yo he deducido 70 miles de millones, valor de la propiedad construida y de las construcciones rurales. No habiéndose hecho ninguna deducción por el valor del suelo que corresponde a la propiedad construida, puede admitirse que la cifra de 191 miles de millones se aproxima por exceso.

b) R': valor del ingreso nacional real en 1913, 328 miles de millones de francos 1938, Sauvy, *Rapport sur le Revenu National*, Conseil Economique, 23 de marzo de 1954. El ingreso nacional nominal se obtuvo dividiendo por la media del índice general ponderado de precios mayoristas (653), para el período 1913-1938, por el índice de precios minoristas en provincias (657), para el período 1914-1938 y de París (702), para el período 1914-1938 (*Annuaire Statistique de la France*, 1957, Parte retrospectiva, pp. 52 y 55). (COLIN CLARK—Tabla V—llega a un valor de ⊙ de  $4,79 + 0,11 = 4,90$ , para lo cual parte de un valor de 36,1 miles de millones de francos para el ingreso nacional de 1913, estimación que no corresponde a la definición de ingreso nacional actualmente admitida).

c) i': valores para el ingreso fijo, *Annuaire Statistique de la France*, 1957, Parte retrospectiva, p. 86.

(4) *Gran Bretaña*: a) C, C<sub>c</sub> y R' en 1914, Stamp, J.R.S.S. 1919, y Colin Clark, *Conditions of Economic Progress*, tercera edición, Mac Millan, 1957, p. 576.

b) i': tasa oficial de interés en 1914, Irving Fisher, *La Théorie de l'Intérêt* (traducción francesa) Giard, 1933, p. 518.

## COMENTARIOS

(1) La concordancia de los valores encontrados para ⊙<sub>0</sub> es tan buena como podía esperarse, si se tiene en cuenta la precisión, muy relativa, con que se conocen los datos estadísticos empleados.

(2) El valor medio determinado para ⊙<sub>0</sub> concuerda perfectamente con los cuatro valores 4,48 — 4,23 — 4,53 y 3,90, hallados para Estados Unidos, para los períodos 1880-1900, 1906-1913, 1923-1937 y 1950-1956.

TABLA V

COEFICIENTES DE ACUMULACION DE CAPITAL  
PARA DISTINTOS PAISES Y EPOCAS DIFERENTES

Continentes	Países	Años	Ingreso real por cabeza	Productividad por hora	$\frac{C}{R'}$	$\frac{C_{\varphi}}{R'}$	$\frac{\Theta'_{T} = C + C_{\varphi}}{R'}$	$\frac{C_{\varphi}}{C}$	$\frac{C_{\varphi}}{C + C_{\varphi}}$
— I — América del Norte	Estados Unidos	1805	—	—	0,83 <sup>(15)</sup>	—	—	—	—
		1850	362	0,341	1,71 <sup>(16)</sup>	1,24	2,95	0,73	0,42
		1880	292 <sup>(5)</sup>	0,292 <sup>(5)</sup>	2,80	—	—	—	—
		1890	355 <sup>(6)</sup>	0,337 <sup>(6)</sup>	3,73	—	—	—	—
		1900	411 <sup>(7)</sup>	0,402 <sup>(7)</sup>	3,71	—	—	—	—
		1912	487 <sup>(8)</sup>	0,510 <sup>(8)</sup>	3,25	—	—	—	—
		1922	563	0,669	3,68	—	—	—	—
		1929	725	0,785	3,47	—	—	—	—
	1939	712	0,998	3,78	—	—	—	—	
	1948	021	1,158	2,91	—	—	—	—	
	Canadá	1914	552 <sup>(9)</sup>	0,517 <sup>(9)</sup>	2,59	1,11	2,70	0,43	0,41
1929	588	0,620	3,76	—	—	—	—	—	
— II — Oceanía	Australia	1890	405 <sup>(10)</sup> (11)	0,448 <sup>(10)</sup> (11)	4,33 <sup>(10)</sup>	4,41 <sup>(10)</sup>	8,74 <sup>(10)</sup>	1,02 <sup>(10)</sup>	0,51 <sup>(10)</sup>
		1903	355 <sup>(12)</sup>	0,356 <sup>(12)</sup>	4,11	3,30	7,41	0,80	0,46
		1915 <sup>(13)</sup>	373	0,451	4,53	—	—	—	—
		1929 <sup>(13)</sup>	492	0,599	4,01	—	—	—	—
		1942 <sup>(13)</sup>	524 <sup>(14)</sup>	0,667 <sup>(14)</sup>	4,37	—	—	—	—
		1949 <sup>(13)</sup>	649	0,751	3,67	—	—	—	—
— III — Europa Occidental	Gran Bretaña	1865	—	—	3,63	2,07	5,70	0,57	0,36
		1875	344	0,297	4,11	1,72	5,83	0,42	0,30
		1885	390	0,339	4,84	1,40	6,24	0,29	0,22
		1895	495	0,412	4,37	0,90	5,27	0,21	0,17
		1905	492	0,403	4,35	0,66	5,01	0,15	0,13
		1909	496	0,397	4,27	0,61	4,88	0,14	0,13
		1914	514	0,397	3,73	0,47	4,20	0,13	0,11
		1928	535	0,515	3,86	0,21	4,07	0,05	0,05
		1938	539	0,505	2,68	—	—	—	—
		1953	604 <sup>(15)</sup>	0,573 <sup>(15)</sup>	2,55	—	—	—	—
	Países Bajos	1893	—	—	6,21 <sup>(16)</sup>	—	—	—	—
		1915	356	0,287	3,75	—	—	—	—
		1927	410	0,384	3,65	—	—	—	—
		1939	480	0,528	4,18	—	—	—	—
	España	1914	421	—	3,09	2,32	5,41	0,75	0,43
		Noruega	1884	145 <sup>(17)</sup>	0,138 <sup>(17)</sup>	3,07	—	—	—
	Bélgica	1939	399	0,419	5,30	—	—	—	—
1914		314 <sup>(18)</sup>	0,248 <sup>(18)</sup>	3,12	0,90	4,02	0,29	0,22	
Alemania	1913	310 <sup>(19)</sup>	0,314 <sup>(19)</sup>	4,70	—	—	—	—	

T A B L A V (Continuación)

Continentes	Países	Años	Ingreso real por cabeza	Productividad por hora	$C$	$C_{\varphi}$	$\frac{\Theta'_{\tau} = C + C_{\varphi}}{R'}$	$\frac{C_{\varphi}}{C}$	$\frac{C_{\varphi}}{C + C_{\varphi}}$
					$\frac{C}{R'}$	$\frac{C_{\varphi}}{R'}$			
	Suecia	1885	135	0,126	4,14	—	—	—	—
		1913	276 <sup>(20)</sup>	0,267 <sup>(20)</sup>	4,93	—	—	—	—
	Francia	1893	193 <sup>(21)</sup>	0,142 <sup>(21)</sup>	3,94	3,55	7,49	0,90	0,47
		1913	266	0,181	4,90	1,94	6,84	0,40	0,28
	Austria	1907	207 <sup>(22)</sup>	0,175 <sup>(22)</sup>	3,80	1,91	5,71	0,50	0,33
	Dinamarca	1880	194 <sup>(23)</sup>	0,151 <sup>(23)</sup>	4,49	—	—	—	—
	Italia	1914	152	0,142	2,89	—	—	—	—
		1928	190	0,240	2,20	—	—	—	—
		1880	182 <sup>(24)</sup>	0,160 <sup>(24)</sup>	2,55	—	—	—	—
— IV — Europa Central	Grecia	1891	162	0,164	3,56	—	—	—	—
	Hungría	1912 <sup>(25)</sup>	110 <sup>(13)</sup>	0,096 <sup>(13)</sup>	4,60	—	—	—	—
		1928	139 <sup>(13)</sup>	0,145 <sup>(13)</sup>	3,45	—	—	—	—
		1938	159 <sup>(26)</sup>	0,171 <sup>(26)</sup>	5,58	—	—	—	—
— V — América del Sur	Argentina	1916	280	0,300	1,73	0,88	2,61	0,51	0,34
	Chile	1950	266	0,324	1,90	—	—	—	—
	Brasil	1940	162	—	2,50	—	—	—	—
— VI — Asia	Japón	1905	—	—	5,09	—	—	—	—
		1913	146	0,116	4,90	—	—	—	—
		1919	100	0,083	8,48 <sup>(16)</sup>	—	—	—	—
		1924	159	0,143	7,76 <sup>(16)</sup>	—	—	—	—
		1930	189	0,188	5,31	—	—	—	—
Mediana					3,77				
Medias			366	0,373	3,88	1,62	5,29	0,45	0,29
Desvío medio relativo			42 %	47 %	22 %	55 %	21 %	52 %	41 %

FUENTES

Colin Clark; *Conditions of Economic Progress*, 3ª edición, Mac Millan 1957, pp. 88 y siguientes y 572 y siguientes.



## NOTAS

- (1) El ingreso real por cabeza y la productividad por hora están dadas en I. U. (International Units). Una "international unit" representa el poder de compra de 1 dólar de los Estados Unidos, término medio, para el período 1925-1934; según nuestros cálculos, ello equivale al poder adquisitivo en los Estados Unidos de aproximadamente 1,7 dólares en 1955.
- (2)  $\text{C}' = \text{C}/\text{R}$ . Hemos incluido los bienes durables de consumo  $\text{C}' = \text{col. (3)} + \text{col. (16)}$ . (Colin Clark).
- (3)  $\text{C}_\psi / \text{R}' = \text{col. (14)} + \text{col. (15)}$  (Colin Clark).
- (4) Para el ingreso real por cabeza y por hora de trabajo, se dan las cifras correspondientes a los años más cercanos a los que pertenecen las evaluaciones de  $\text{C}/\text{R}'$ .
- (5) Promedio 1874 - 1883.
- (6) Promedio 1884 - 1894.
- (7) Promedio 1894 - 1903.
- (8) 1914
- (9) 1910
- (10) Nueva Gales del Sur, solamente.
- (11) 1891
- (12) Promedio 1901 - 1903.
- (13) Año que finaliza el 30 de junio del año citado.
- (14) 1939
- (15) 1952
- (16) Este valor parece dudoso.
- (17) 1891
- (18) 1913
- (19) Fronteras actuales.
- (20) 1914
- (21) 1890
- (22) Promedio 1911 - 1913.
- (23) 1870
- (24) 1883
- (25) Fronteras de 1919.
- (26) Año que finaliza el 30 de junio de 1939.
- (27) *Desvío medio relativo*: es la media, en %, de los desvíos relativos de los 58 valores con respecto a su promedio.

## COMENTARIOS

- (1) Sólo se han dado cifras para fijar los órdenes de magnitud. Los métodos de estimación y los materiales empleados son de un valor tan desigual que únicamente se puede adjudicar una precisión demasiado incierta a las cifras.  
Cualesquiera que sean nuestras reservas personales a propósito de ciertos valores suministrados por Colin Clark, hemos preferido, en beneficio de la objetividad, mantenerlos tales como son, sin omisiones ni correcciones. Nuestras propias estimaciones están dadas en las tablas I, II y IV.
- (2) En ninguna parte, excepto para Argentina en 1916, Chile en 1950 y Estados Unidos en 1805 y en 1850, el coeficiente de acumulación

de capital estuvo por debajo del valor 2. Y aun los casos en que este coeficiente presenta valores débiles, parecen referirse a evaluaciones no muy serias.

Igualmente, los valores superiores a 5,5 no son muy frecuentes y es probable que tales estimaciones procedan del empleo de métodos estadísticos defectuosos.

- (3) Para las 12 estimaciones que personalmente hemos realizado para los Estados Unidos de 1880 a 1956, la media y la mediana de  $\Theta'$  son, respectivamente, 3,54 y 3,46 (Tabla I); en cambio, para el conjunto de los 58 valores de la Tabla V, la media y la mediana son, respectivamente 3,88 y 3,77 (la mediana de los valores comprendidos entre 3 y 4,5 es 3,78). Estas cifras son muy próximas, y ello nos permite pensar que las diferencias registradas se deben, esencialmente, a diferentes definiciones o a errores estadísticos.

Para los 58 valores hay un desvío medio, respecto a la media aritmética, de 22%, que es relativamente pequeño.

Esos 58 valores se distribuyen como sigue:

	<	1,5	1
1,5	—	2,99	12
3	—	3,749	15
3,75	—	4,49	17
4,5	—	5,99	10
	≥	6	3

- (4) La explicación de las diferencias mediante causas puramente estadísticas, se encuentra apoyada por el hecho de que el desvío medio, respecto a la media, de las estimaciones de  $\Theta'$  dadas más arriba por Colin Clark, para los Estados Unidos en 1805-1948, es de 25%, mientras que sólo es de 22% para el conjunto de la tabla. Si se eliminan los dos valores en extremo desviados (sin duda porque son los más antiguos) de 1805 y 1850 de los Estados Unidos, el desvío medio relativo de los valores comprendidos entre 1880 y 1948 es entonces de 16% (en este caso, la media y la mediana son 3,42 y 3,57).

Ahora bien, para Estados Unidos, la adopción de valores convenientes para C y R' en el período 1880-1956 (Tabla I), conduce a un desvío medio para  $\Theta'$  que no excede el 5%.

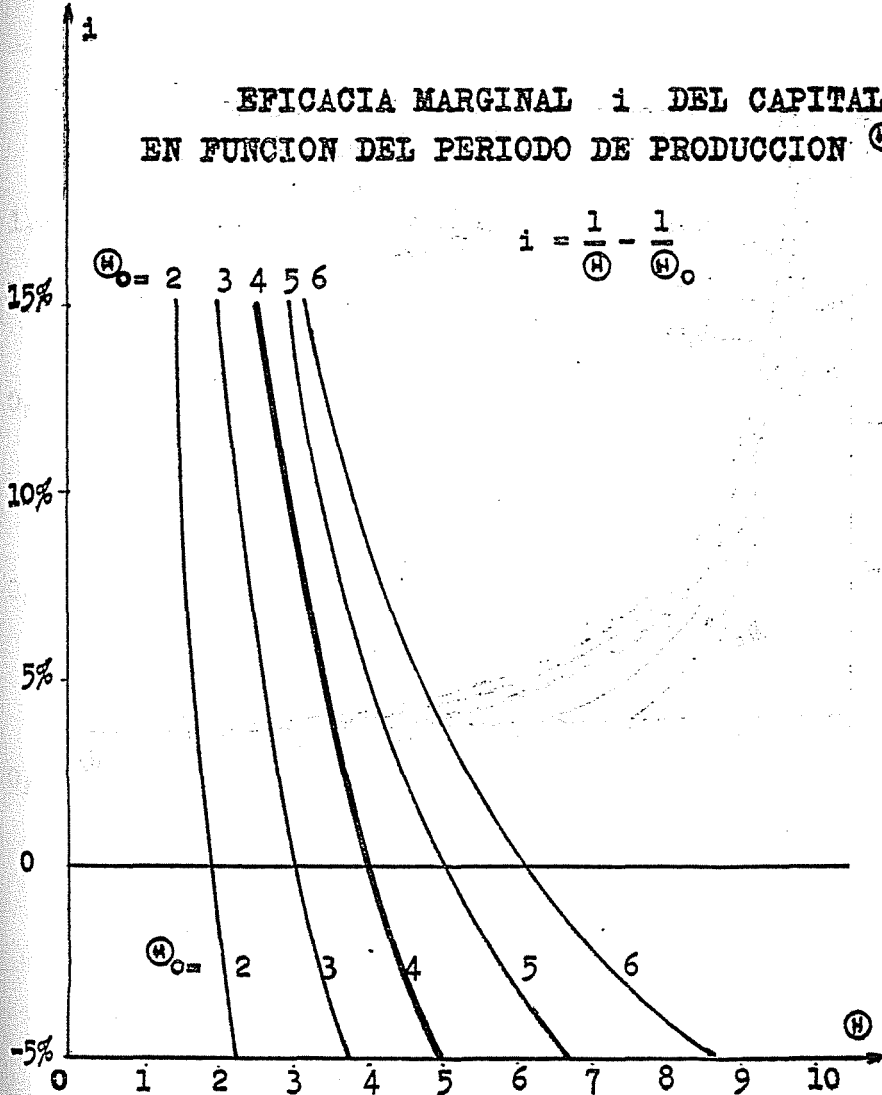
- (5) Desde este punto de vista, aún el caso de Francia en 1913 aparece como un ejemplo en extremo convincente. (Tabla VI, 3ª nota, nota (1)). La adopción de valores correctos para C y R' lleva, en efecto, a una cifra de 3,91 para  $\Theta'$ , muy cercana de la media de 3,77, que hemos encontrado, mientras que Colin Clark da para  $\Theta'$  el valor 4,90.
- (6) En favor de esta conclusión puede todavía destacarse el hecho de que, económicamente, la situación de los Estados Unidos corresponde a un caso extremo, porque su productividad real por hora está —en todas épocas—, entre las más elevadas. Además, la circunstancia de estar  $\Theta'$  próximo a la mediana  $\Theta'$  de países muy distintos, cuya productividad es ciertamente muy débil, inclina a concluir que la variación de los  $\Theta'$  tiene un origen puramente estadístico.

- (7) Se puede hacer notar también que eliminando los valores muy desviados de 1805 y 1850 de los Estados Unidos y de 1919 y 1924 de Japón, no se obtiene ninguna correlación significativa de  $\Theta'$  con  $t$  ( $\rho = -0,170$ ), con el logaritmo de la productividad ( $\rho = -0,940$ ), o con el logaritmo del ingreso medio por cabeza ( $\rho = -0,080$ ). Para valores nulos de los coeficientes de correlación, las probabilidades de obtener coeficientes mayores que los observados son, respectivamente, 13%, 17% y 30%.
- (8) Es preciso, por fin, hacer notar que aun en la hipótesis de un valor constante de  $\Theta_0$ , y según la relación  $\Theta = \Theta_0/(1+i\Theta_0)$ ,  $\Theta$  no es absolutamente fijo y debe variar ligeramente con  $i$ .

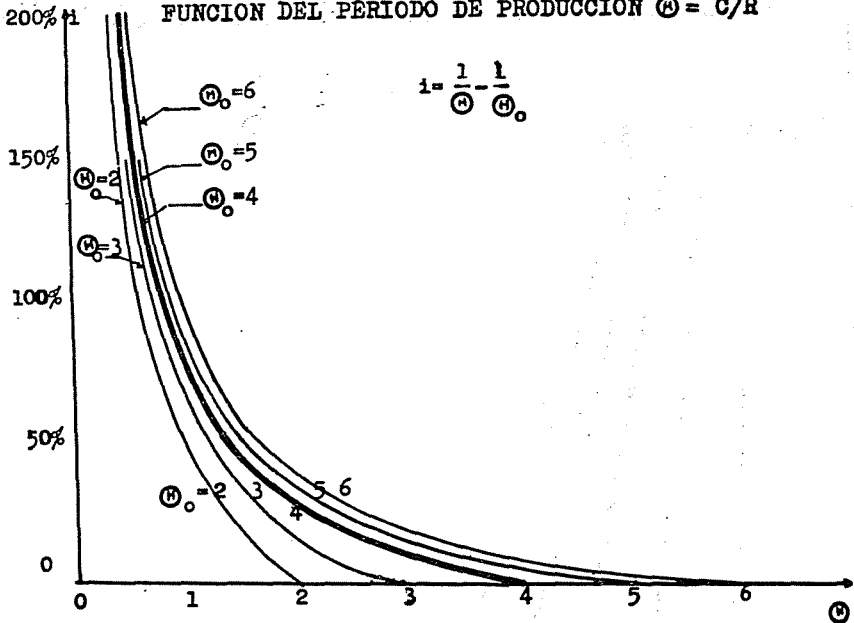
ANEXO B

ANEXO B I

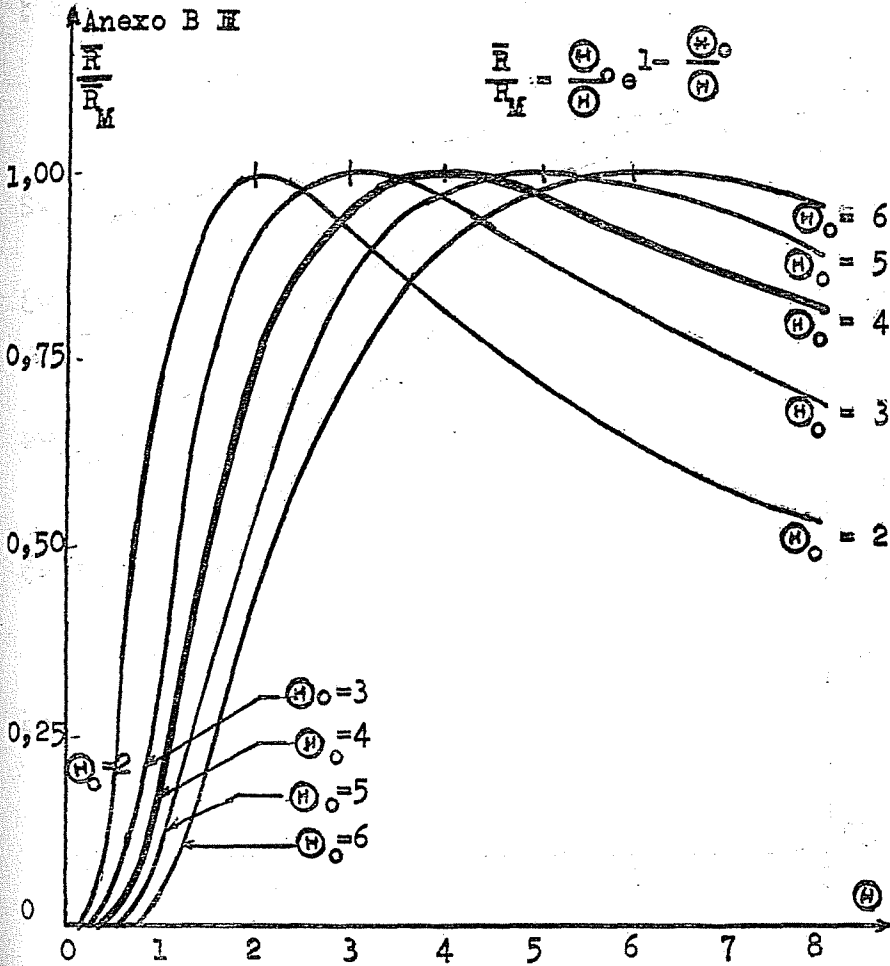
EFICACIA MARGINAL  $i$  DEL CAPITAL  
EN FUNCION DEL PERIODO DE PRODUCCION  $\textcircled{H} = C/R$



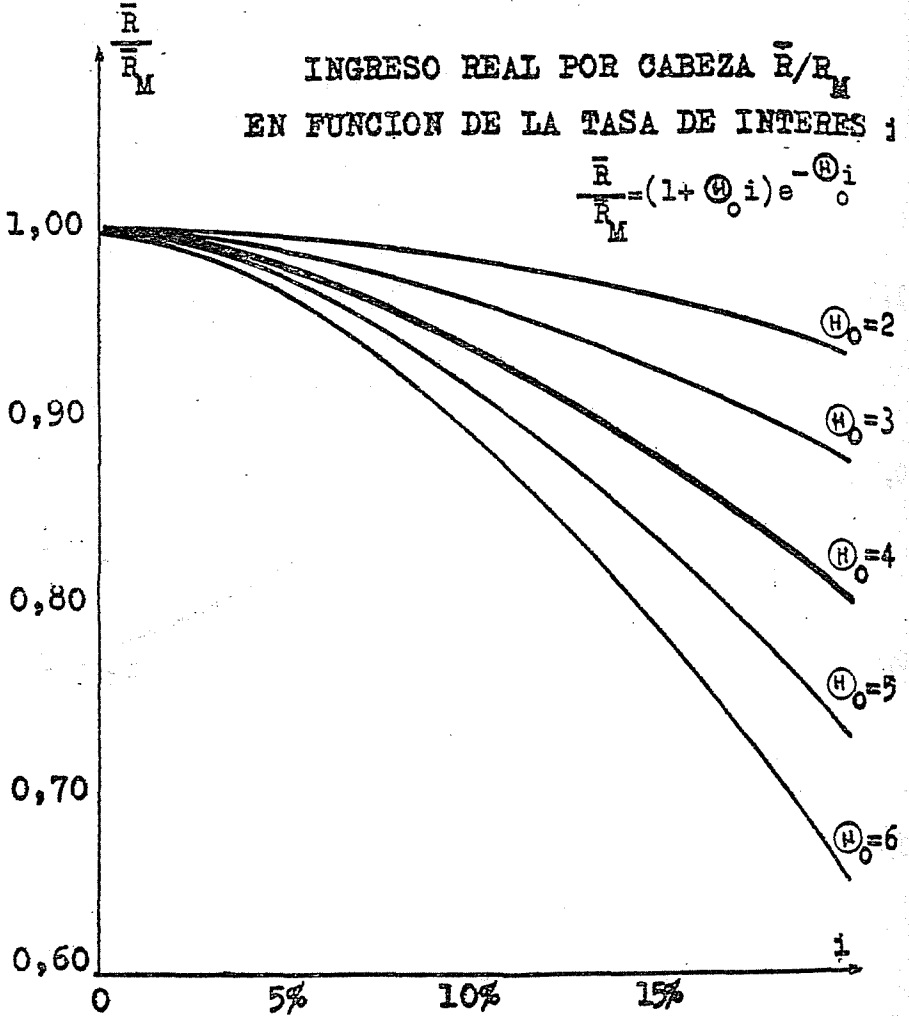
Anexo B II EFICACIA MARGINAL 1 DEL CAPITAL EN  
 FUNCION DEL PERIODO DE PRODUCCION  $\alpha = C/R$



INGRESO REAL POR CABEZA  $\bar{R}/R_M$  EN  
 FUNCION DEL PERIODO DE PRODUCCION  $\Theta = C/R$   
 Caso de una función homogénea de producción

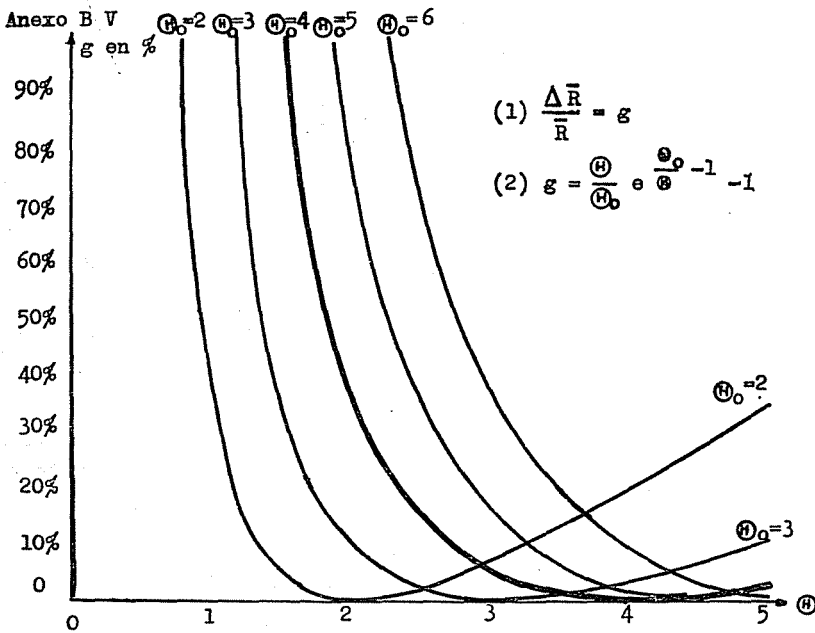


Anexo BIV



INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

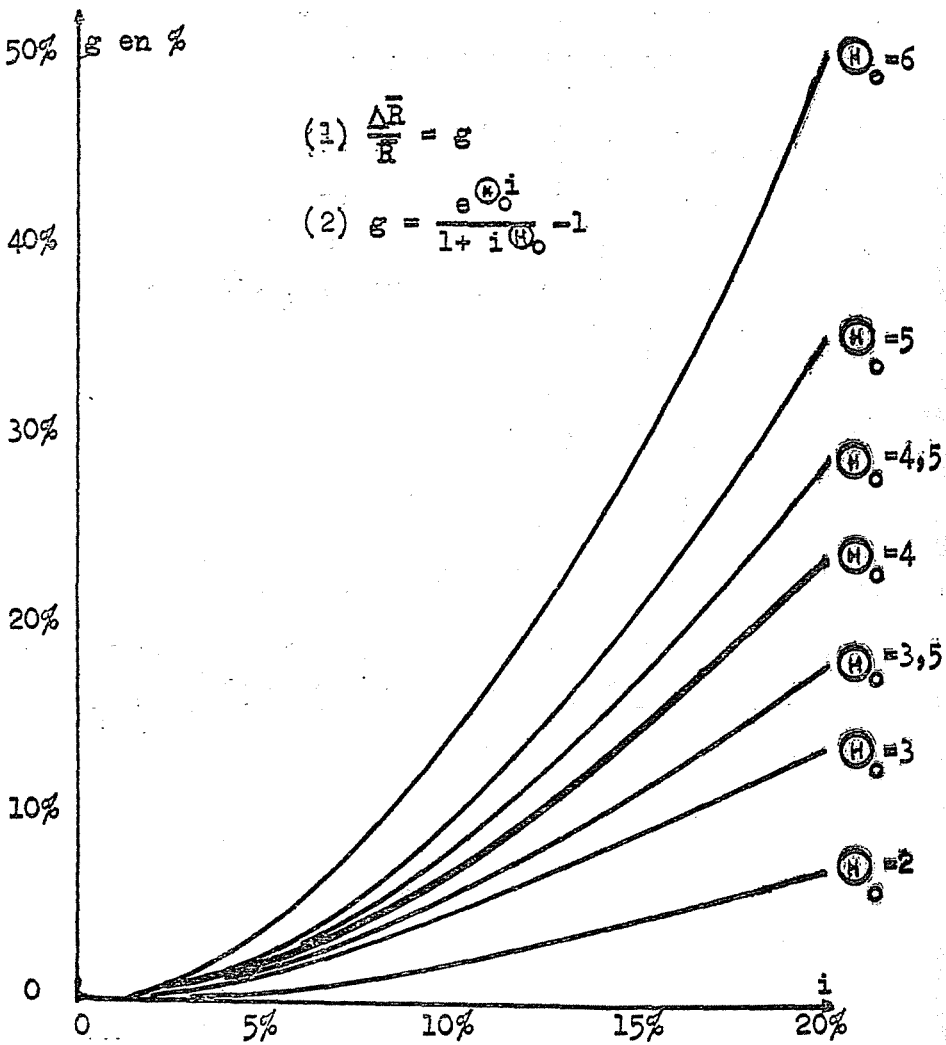
INCREMENTO RELATIVO MAXIMO DEL INGRESO  
REAL QUE SE PUEDE OBTENER LLEVANDO EL  
PERIODO DE PRODUCCION DE  $\Theta$  A  $\Theta_0$



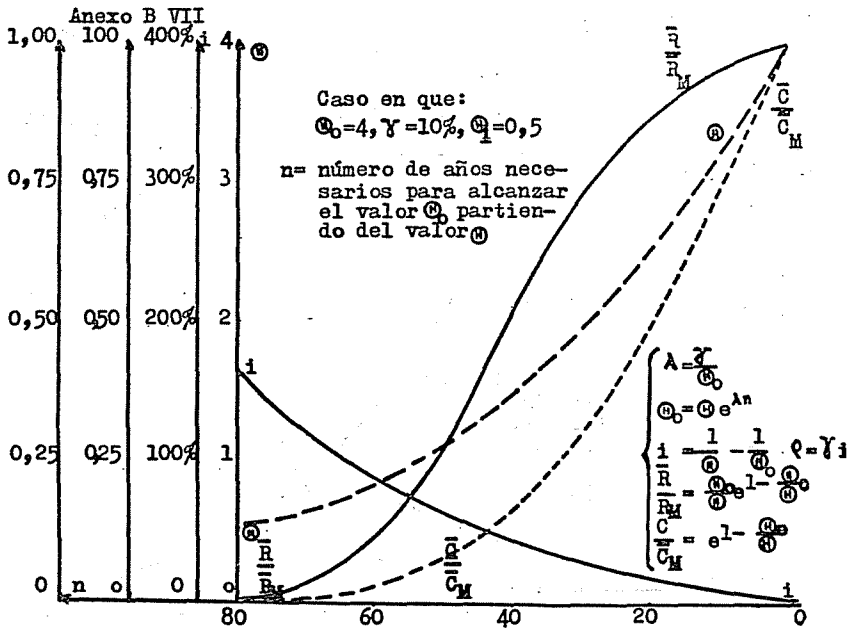


INCREMENTO RELATIVO MAXIMO DEL INGRESO REAL QUE SE PUEDE OBTENER CUANDO LA TASA DE INTERES PASA DEL VALOR 1 AL VALOR CERO DE LA EFICACIA MARGINAL DEL CAPITAL

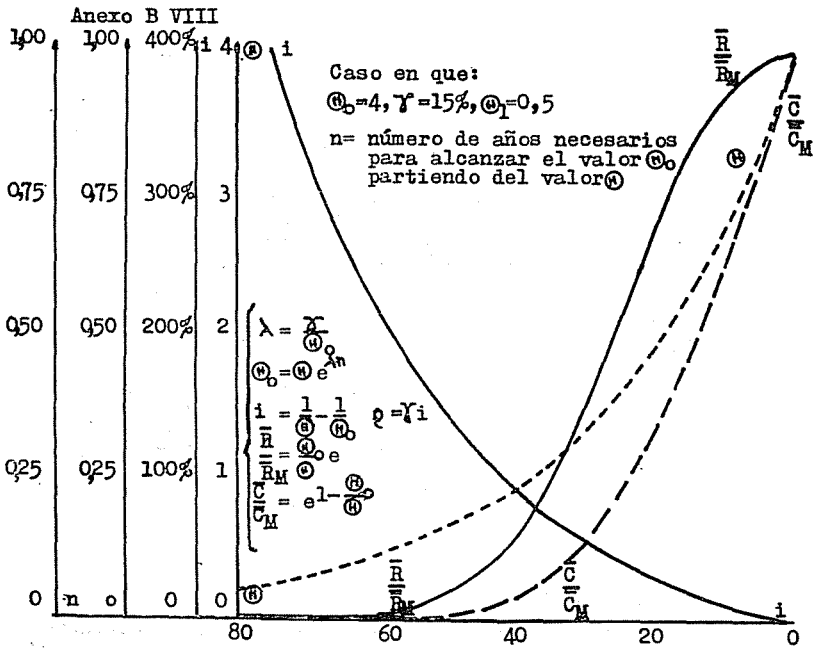
Anexo B VI



PROGRESO CAPITALISTICO POR REALIZACION  
DE UNA INVERSION NETA ANUAL IGUAL A UN  
PORCENTAJE CONSTANTE DE LA RENTA NACIONAL



PROGRESO CAPITALISTICO POR REALIZACION  
DE UNA INVERSION NETA ANUAL IGUAL A UN  
PORCENTAJE CONSTANTE DE LA RENTA NACIONAL



ANEXO B IX

PROGRESO CAPITALISTICO POR REALIZACION DE UNA  
INVERSION NETA ANUAL IGUAL A UN PORCENTAJE  
CONSTANTE DE LA RENTA NACIONAL

$n$  = número de años necesarios para que  $\odot$  alcance  $\odot_0$

$$\odot_0 = 4 \qquad \lambda = \frac{\gamma}{\odot_0}$$

$$\odot_0 = \odot e^{\lambda n} \qquad i = \frac{1}{\odot} - \frac{1}{\odot_0} \qquad \frac{d\bar{R}}{dt} = \rho = \gamma i$$

$$\frac{\bar{R}}{\bar{R}_M} = \frac{\odot_0}{\odot} e^{i - \frac{\odot_0}{\odot}} \qquad \frac{\bar{C}}{\bar{C}_M} = e^{i - \frac{\odot_0}{\odot}} \qquad \bar{C}_M = \odot_0 \bar{R}_M$$

n	10 %					15 %				
	$\odot$	i	$\frac{\bar{R}}{\bar{R}_M}$	$\frac{\bar{C}}{\bar{C}_M}$	$\rho$	$\odot$	i	$\frac{\bar{R}}{\bar{R}_M}$	$\frac{\bar{C}}{\bar{C}_M}$	$\rho$
80	0,54	159,7	0,013	0,002	0,16	0,20	477,1	$1,10^{-7}$	$6,10^{-9}$	0,72
70	0,70	118,9	0,050	0,009	0,12	0,29	320,1	$4,10^{-5}$	$3,10^{-6}$	0,48
60	0,89	87,0	0,138	0,031	0,09	0,42	212,2	0,002	$2,10^{-4}$	0,32
50	1,15	62,3	0,289	0,083	0,06	0,61	138,0	0,026	0,004	0,21
40	1,47	43,0	0,488	0,179	0,04	0,89	87,0	0,138	0,031	0,13
30	1,89	27,9	0,693	0,327	0,03	1,30	52,0	0,385	0,125	0,08
20	2,43	16,2	0,862	0,523	0,02	1,89	27,9	0,693	0,327	0,04
15	2,75	11,4	0,923	0,634	0,01	2,28	18,9	0,825	0,470	0,03
10	3,12	7,0	0,967	0,755	0,017	2,75	11,4	0,923	0,634	0,02
5	3,53	3,3	0,992	0,875	0,003	3,31	5,1	0,981	0,813	0,01

## BIBLIOGRAFIA

### I. TEORIA

JEVONS, *Théorie de l'Economie Politique*, Giard, 1900. Chapitre VII, pp.316 à 326.

FISHER (I.), *De la Nature du Capital et du Revenu*. (1ère édition 1906). Giard, 1911.

FISHER (I.), *La Théorie de l'Interêt*. Giard, 1933.

BOUSQUET (G.), *Instituts de Science Economique*, T. III, Rivière, Paris, 1936, pp. 157 à 169.

ALLAIS (M.), *Economie et Intérêt*. Imprimerie Nationale, Paris 1947 (en dépôt à la Librairie de Médecis), Chap. V et VII.

ALLAIS (M.), *Rendement Social et Productivité Sociale*. Mémoire présenté au Congrès International d'Econométrie de Washington en Septembre 1947. *Proceedings of International Statistical Conferences*, 1947. Vol. V, pp. 129 sq.

ALLAIS (M.), *Intérêt et Productivité Sociale*. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, Septembre-Octobre 1948. Vol. 89, pp. 355-380.

ALLAIS (M.), *Intérêt et Productivité Sociale*. Thèse d'Ingénieur-Docteur de l'Université de Paris. Faculté des Sciences (Mention très honorable avec félicitations du Jury). Juin 1949.

ALLAIS (M.), *Taux d'Intérêt, Période de Production et Répartition des Facteurs Primaires de Production*. *Journal de la Société de Statistique de Paris*. Nov.-Déc. 1949, pp. 441 à 458.

ALLAIS (M.), *Observations sur l'Analyse des Relations entre le Capital et la Production*. Travaux du Congrès des Economistes de Langue Française (1955). Editions Domat-Montcrestien, 1956, pp. 188 à 223.

DESROUSSEAUX (J.), *Variations sur la Croissance Economique*. 16 pp. et Annexe de 13 pages dactylographiées.

DESROUSSEAUX (J.), *Caracteristiques globales des économies quelconques*. Document miméographié de 5 pages. Charbonnages de France, 1960.

ALLAIS (M.), *L'Europe Unie, Route de la Prospérité*. Calmann-Lévy, Paris, 1960.

II. DATOS ESTADISTICOS

- COLSON (C.), *Cours d'Economie Politique*, t. III, Gauthier-Villars, 1918, Chap. IV.
- MACAULAY (F. R.), *The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. National Bureau of Economic Research, New-York, 1938, 351 pp.
- STONE (R.), National Income in the United Kingdom and the United States of America. *The Review of Economic Studies*, Winter 1942-43, p. 127.
- COLIN-CLARK (M. A.), *The Economics of 1960*. MacMillan, 1944, 122 p.
- KUZNETS (S.), *National Product since 1869*. National Bureau of Economic Research, 1946.
- CREAMER (D.), *Capital and Output Trends in Manufacturing Industries 1880-1948*. National Bureau of Economic Research, Occasionnal Paper, nº 41, 1948.
- BUREAU DE STATISTIQUES ET D'ETUDES FINANCIERES DU MINISTERE DES FINANCES. *La Fortune Nationale, L'Actualité Economique et Financière*, 7ème année, nº 3, Paris, Mai 1948. Numéro spécial groupant toute une série d'études sur le Capital National, 298 p.
- U. S. DEPARTMENT OF COMMERCE, BUREAU OF THE CENSUS, Historical Statistics of the United States, 1789-1945. Supplement of the *Statistical Abstract of the United States*, 1949, 365 p.
- GOLDSMITH (R. W.), A Perpetual Inventory of National Wealth. *Studies in Income and Wealth*, Vol. 14, National Bureau of Economic Research, New-York, 1951.
- GOLDSMITH (R. W.), The Growth of Reproducible Wealth of U.S.A. from 1805 to 1950, dans "Income and Wealth of the United States". *Studies in Income and Wealth*. Series II, Bowes, and Bowes, Cambridge, 1952.
- KUZNETS (S.), Proportion of Capital Formation to National Product. *American Economic Review*, May 1952; pp. 507-526.
- LEONTIEFF (W.), *Studies in the Structure of The American Economy*. Oxford University Press, New-York, 1953.
- KUZNETS (S.), Long Term Changes in the National Income of the U.S.A. since 1870.
- GOLDSMITH (R. W.), *A Study of Saving in the United States*, 3 vol., Princeton University Press, 1955.
- KUZNETS (S.), International Differences in Capital Formation and Financing. National Bureau of Economic Research, *Capital Formation and Economic Growth*, 1955.
- REDFERN (P.), Net Investment in Fixed Assets in the United Kingdom 1938-1953. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A (general), Vol. 118, Part. 2, 1955, pp. 141 to 182.

- DIVISIA (F.), DUPIN, ROY (R.), *Fortune de la France*. Société d'Éditions de Revues et de Publications, Paris, 1956.
- BARNA (T.), The Replacement Cost of Fixed Assets in British Manufacturing Industry in 1955. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* (general), Vol. 120, Part. 1, 1957, pp. 1 to 36.
- COLIN-CLARK (M. A.), *The Conditions of Economic Progress*. 3rd Edition. MacMillan, 1957. Chap. III, VI and XI.
- U. S. DEPARTMENT OF COMMERCE. BUREAU OF THE CENSUS, *Statistical of the United States*, 1959, 1042 pages.
- NATIONAL INDUSTRIAL CONFERENCE BOARD, *The Economic Almanac 1960*, New York 1960, 673 pages.

### III. INVESTIGACIONES EMPIRICAS

#### A. FUNCIONES DE PRODUCCION

- DOUGLAS (P. H.). A Theory of Production. *American Economic Review*, Suppl. vol. XVIII, March 1928, pp. 139-165.
- DOUGLAS (P. H.), *The Theory of Wages*. New-York 1934.
- HANSAKER (M. L.) et DOUGLAS (P. H.), The Theory of Marginal Productivity contested by Data for Manufacturing in Victoria. *Quarterly Journal of Economic*. Vol. LII and LIII, Nov. 1937 and Feb. 1938.
- DURAND (D.), Some Thoughts on Marginal Productivity with Special Reference to Professor Douglas Analysis. *Journal of Political Economy*, Vol. XLV, Dec. 1957.
- MENDERSHAUSEN (H.), On the Significance of Professor Douglas Production Function. *Econometrica*, vol. VI, April 1938.
- BRONFENBRENNER (M.) and DOUGLAS (P. H.), Cross-Section Studies in the Cobb-Douglas Function, *Journal of Political Economy*, vol. XLVII, 1938.
- DOUGLAS (P. H.), Théorie et Politique des Salaires. *Revue Internationale du Travail*, Mars 1939.
- DOUGLAS (P. H.) and GUNN (G.), Further Measurements of Marginal Productivity. *Quarterly Journal of Economics*, vol. LV, 1940.
- DOUGLAS (P. H.), and GUNN (G.), The Production Function for American Manufacturing in 1919. *American Economic Review*, vol. XXXI, 1941.
- TINBERGEN (J.), Professor Douglas' Production Function. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 1924-1.
- TINBERGEN (J.), Zur Theorie der Langfristigen Wirtschaftsentwicklung. *Welwirtschaftliches Archiv*, 1942-3.
- BROWNE (G. W. G.), The Production Function for South African Manufacturing Industry. *South African Journal of Economics*, 1943.
- BRONFENBRENNER (M.), Production Function: Cobb-Douglas, Interfirm, Intrafirm. *Econometrica*, 1944.

INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CAPITAL

- WILLIAMS (J. W.), Professor Douglas' Production Function. *Economic Record*, 1945.
- WALL (B.), A Cobb-Douglas Function for the United States Manufacturing and Mining. *Econometrica*, vol. 16, 1948, p. 211.
- DOUGLAS (P. H.), Are these Laws of Production? *American Economic Review*, vol. XXXVIII, March 1948.
- DONGEN TORMAN (D. H.), van De Cobb-Douglas Produktiefunctie. Rotterdam, 1950.
- LOMAX (K. S.), Production Functions for Manufacturing Industry in the United Kingdom. *American Economic Review*, vol. XI, June 1950, p. 397.
- VERDOORN (P. J.), Fattori che Regolano lo Sviluppo della Produttività del Lavoro. *L'Industria*. Milano, nº 1, 1949, 11 p.
- VERDOORN (P. J.), On an Empirical Law Governing the Productivity of Labour. Document miméographie, 13 pages. Congrès d'Econométrie de Varèse, 1950.
- HIRSCH (W. Z.), Manufacturing Progress Functions. *The Review of Economics and Statistics*, vol. XXXIV, 1952.
- SHEPHARD (R. W.), *Cost and Production Functions*. Princeton, New-Jersey, 1953.
- CHAMPERNOWNE (D. G.), The Production Function and the Theory of Capital: A Comment. *Review of Economic Studies*, 1953-54.
- LESER (Conrad E. V.), Production Functions for the British Industrial Economy. *Applied Statistics*, June 1954.
- VERDOORN (P. J.), Complementarity and Long-Range Projections, *Econometrica*, Vol. 24/4, 1956.
- BROWN (Phelps), The Meaning of the Fitted Cobb-Douglas Function. *Quarterly Journal of Economics*, vol. LXXI, 1957, pp. 546-557.
- SOLOW (R. M.), Technical Change and the Aggregate Production. *The Review of Economic and Statistics*, vol. XXXIX, 1957.
- CARTER (H. O.), and HARTLEY (H. O.), A Variance Formula for Marginal Productivity Estimated Using the Cobb-Douglas Function. *Econometrica*, vol. XXVI, 2, April 1958, p. 306-313.
- MAIZELS (A.), Comparative Productivity in Manufacturing Industry. A case Study of Australia and Canada. *Economic Recorder*, vol. XXXIV, 69, April 1958.
- NIITAMO (O.), The Development of Productivity in Finish Industry, 1925-1952. *Productivity Measurement Review*, Nov. 1958, nº 15, pp. 30 to 41.
- GROUPE D'EXPERTS INDEPENDANTS, Commission de l'expansion générale, Travaux sur les fonctions de production. Documents miméographiés, Communauté Européenne du Charbon et de l'Acier, 1959.
- VERDOORN (P. J.), Capital and Technical Development in Long-Term Projection Models. *Colloque sur le Capital fixe des Entreprises*, Brussels, April 1959.



SETON, (F.), Soviet Economic Trends and Prospects, Production Functions in Soviet Industry. *American Economic Review*, Vol. XLIX. May 1959, nº 2, pp. 1 to 14.

#### B. COEFICIENTE DE CAPITAL

KUZNETS (S.), Proportion of Capital Formation in National Product. *American Economic Review*, May 1952, nº 2.

DOBB, Note sur le degré d'intensité capitalistique. *Economie Appliquée*, 1954, nº 3.

BARRERE (A.), Analyse des Relations entre le Capital et la Production. Rapport au Congrès des Economistes de Langue Française. Travaux du Congrès. Domat-Montchrestien, Paris, 1956 et *Revue d'Economie Politique*, Mai-Juin 1955, p. 332.

DAVIS (H. S.), Relation of Capital Output Ratio to Firm Size in American Manufacturing. One Additional Evidence. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. XXXVIII, nº 3, August 1959, pp. 286 to 288.

HOGAN (W. P.), The Limitations of Capital Coefficients: A Comment. *American Economic Review*, Vol. XLIX, nº 1, March 1959, pp. 138 to 151.

DOMAR, Les Interrelations entre le Capital et la Production dans l'Economie Américaine. *Bulletin International des Sciences Sociales*, Unesco, Vol. 6, nº 2.

#### C. LEY DE AMORTIZACION

BOITEAUX (M.), L'Amortissement. Dépréciation des Automobiles. *Revue de Statistique Appliquée*, Vol. IV, nº 4, 1956.

FAURE (H.), Les Modèles Econométriques du Marché de l'Automobile. *Annales de Recherches et de Documentation sur la Consommation*. 3ème année, nº 3. Juillet/Septembre 1957, 117 pages.

BLANK (D. M.) et WINNICK (L.), Capital Formation in Private Nonfarm Residential Construction, in "Problems of Capital Formation". National Bureau of Economic Research, Princeton, University Press, 1957.