VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE EL MODELO BINOMIAL Y SU VERSIÓN BORROSA

GASTÓN S. MILANESI
Departamento de Ciencias de la Administración-Universidad Nacional del Sur. ARGENTINA
milanesi@uns.edu.ar

Fecha Recepción: Diciembre 2013 - Fecha Aceptación: Abril 2014

RESUMEN

El trabajo presenta diferentes modelos de valuación de opciones reales clasificándolos según su naturaleza probabilística o borrosa, poniendo atención en el método binomial y su versión borrosa. El último conjuga los conceptos tradicionales del modelo de valoración de opciones binomial con la lógica borrosa, y se transforma en un complemento para la evaluación de decisiones de inversión en activos reales, en particular, frente a situaciones de ambigüedad de información. La estructura del documento es la siguiente: primero se presenta una sintética revisión, donde son enunciados los modelos de opciones reales según su naturaleza probabilística y borrosa. Luego se deriva formalmente el modelo binomial y su versión borrosa, y se ilustra con un caso de aplicación. Para ello se valora un proyecto con opciones de invertir-continuar-abandonar. Se concluye que la versión borrosa es un complemento del modelo binomial, siendo de utilidad para evaluar decisiones de inversión para situaciones de vaguedad o ambigüedad de información como proyectos innovadores, desarrollos tecnológicos, inexistencia de activos financieros réplicas a los flujos de fondos del emprendimiento, entre otras.

PALABRAS CLAVES: Opciones Reales – Binomial – Borroso

ABSTRACT

The paper shows different real options valuation models classified according to their probabilistic or fuzzy nature, and paying attention to the binomial method and its fuzzy version. The last conjugates binomial real option valuation model's traditional concepts with the fuzzy logic, and transforms itself in a complement for evaluation investment decisions in real assets, specially, front ambiguities information situations. The structure of the document is the following: first a summary revision is shown, where the real options models are enunciated according their probabilistic or fuzzy nature. Then the binomial model and its fuzzy version is formally derived, and illustrates with an application case. For that a project with options of investment-continue-abandonment is valued.

The conclusion is that the fuzzy version is a complement of the binomial model, being useful in investment decisions for information vague or ambiguity situations like innovative projects, technological development, inexistences of mimics financial assets in the market, among other.

KEY WORDS: Real Options – Binomial – Fuzzy

1. INTRODUCCIÓN: SÍNTESIS DE MODELOS PROBABILÍSTICOS Y BORROSOS EN LA TEORÍA DE OPCIONES REALES

La valoración de activos reales requiere de modelos dinámicos para capturar el valor potencial de la flexibilidad estratégica del proyecto. La Teoría de Opciones Reales se constituye en una respuesta a tal necesidad, con modelos de solución cerrada empleando ecuaciones diferenciales dinámicas estocásticas en tiempo continuo o discreto. En el campo de la valuación financiera, en particular mediante la Teoría de Opciones Reales, ha cobrado importancia el uso de los Conjuntos Borrosos (*Fuzzy Sets*), como complemento del enfoque probabilístico en situaciones donde la falta total de información se adapta mejor al trabajo con escalas semánticas que caracterizan niveles de ambigüedad-vaguedad; (Fornero, 2012) en la toma de decisiones empresariales (Kinnunen, 2010). Son pocas las investigaciones donde los enfoques indicados son contrastados analizando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

A partir de lo expuesto en el párrafo anterior el presente trabajo tiene como fines: (a) presentar una sintética clasificación de los modelos de valoración de opciones según sean probabilístico o borrosos; (b) trazar diferencias y similitudes entre el tradicional modelo binomial y su par bajo la lógica *fuzzy*; (c) ilustrar el funcionamiento de ambos con un caso de aplicación; (d) Concluir sobre las ventajas y desventajas de los modelos estudiados.

A continuación se presentan los modelos seminales de valuación de opciones reales y sus correspondientes derivaciones. Esta sistematización del estado del arte pretende servir de mapa conceptual para el estudio de los modelos en cuestión. Se proponen dos categorías generales según su origen probabilístico o borroso, cada una divididas en los siguientes subgrupos: (a) tiempo continuo y sus derivaciones, en donde se ubican los desarrollos seminales de la Teoría de Opciones; (b) discretos y derivaciones; donde surgen la mayoría de las propuestas en el campo de las Opciones Reales. Merece ser destacado el segundo grupo, debido que este se cimienta en las nociones de conjunto borrosos y se clasifican en tres grupos: (a) modelos continuos borrosos; (b) el método de flujos de fondos borrosos; (c) modelos binomiales borrosos; conforme surge de la FIGURA 1.

1.1 Modelos probabilísticos

a) Modelos en tiempo continuo y sus derivaciones: La teoría de opciones reales nace con el modelo de valoración para opciones europeas conocido como Black-Scholes y el posterior aporte de Merton; (Black y Scholes, 1973); (Merton, 1973). Varias han sido las transformaciones y adecuaciones desde su formulación original, estas han avanzado introduciendo modificaciones al proceso estocástico sobre el subyacente; incorporando cantidad de momentos estocásticos de orden superior, definiendo complejidad, características y estructura de la opción (exóticas-simples), introduciendo imperfecciones y efectos del mercado (apalancamientos del subyacente), entre otras; (Dixit y Pindyck, 1994); (Luherman, 1998); (Copeland y Tufano, 2004); (Baliero Filho y Rosenfeld, 2004); (Hull, 2006); (León *et al*., 2007); (Haug Gaarder, 2007); (Wilmott, 2009). Los modelos en tiempo continuo mayoritariamente reconocen su campo de aplicación en la valoración de opciones financieras. No obstante existen métodos que derivan en sencillos algoritmos utilizando modelos en tiempo continuo para valorar opciones reales. Estos respetan los supuestos de cartera réplica del modelo Black-Merton-Scholes (BMS); empleando las técnicas de escenarios y simulaciones con el objeto de inferir la distribución de probabilidad de los posibles valores del subyacente. El valor de la flexibilidad estratégica surge del promedio de valores positivos asignando valor cero a los negativos; (Datar y Mathews, 2004); (Datar *et al*., 2007).

b) Modelos en tiempo discretos y sus derivaciones: La valuación de la flexibilidad estratégica en proyectos de inversión, empresas en marcha y activos reales ha quedado reservada preferentemente para los modelos planteados en tiempo discreto. Estos son utilizados preferentemente en el planteo de modelos de decisión y en la mayoría de las aplicaciones de opciones reales (Trigeorgis, 1995); (Trigeorgis, 1997); (Luherman, 1998); (Amram y Kulatilaka, 1998), (Mun, 2004), reconociendo sus raíces en el clásico modelo binomial; (Cox *et al*., 1979). Debido a su versatilidad se adapta a distintas modalidades y adecuaciones según: (a) se trabaje con rejillas o árboles (Brandao *et al*., 2005); (Smith, 2005), (b) el enfoque propuesto sea binomial o trinomial; (Rendleman y Bartter, 1979); (Jarrow y Rudd, 1982); (Boyle, 1988), (Rubinstein, 2000); (Jabbour *et al*., 2001); (c) probabilidades objetivas, equivalentes ciertos y probabilidades implícitas, (Rubinstein, 1994); (Derman *et al*., 1996); (Arnold *et al*., 2004); (Arnold y Crack, 2004); (d) momentos estocásticos de orden superior y transformaciones sobre la distribución binomial, (Rubinstein, 1998); (Haahtela, 2010); (Milanesi, 2012); (e) enfoques para la estimación de la volatilidad (*marketed asset disclaimer* (MAD) - riesgos de mercados y privados-volatilidades cambiantes); (Smith y Nau, 1995); (Copeland y Antikarov, 2001); (Haahtela, 2011); (f) aplicaciones de Teoría de Juegos (Smit y Trigeorgis, 2004).

1.2. Modelos Borrosos (*Fuzzy*)

En esta categoría se agrupan los modelos que trabajan en un esquema de posibilidad aplicando matemáticas borrosas (f*uzzy*) (Zadeh, 1965); (Dubois y Prade, 1980); (Carlsson y Fuller, 2001). Los algoritmos de valoración y el análisis del riesgo se circunscriben al concepto de posibilidad y el uso de la matemática borrosa (Fuller y Majlender, 2003), (Kahraman *et al*., 2002). Este grupo deviene de adecuar los modelos tradicionales de opciones (1.1) a la lógica de los conjuntos borrosos. Estos se clasifican en:

a) *Modelo en tiempo continuo Fuzzy* (MCF): se parte del clásico modelo BMS empleando las nociones de conjuntos borrosos para valorar opciones financieras o reales. Se supone comportamiento borroso utilizando números trapezoidales con el objeto de describir los posibles valores del subyacente (activo financiero o real) y precios de ejercicio respectivamente; (Carlsson y Fuller, 2003); (Carlsson *et al*., 2007).

b) *Fuzzy Pay-Off Method* (FPOM): desarrollado por Collan *et al*., (2009) combina la técnica de escenarios, distribuciones de probabilidad triangulares y matemáticas borrosas (*fuzzy*). El valor de la opción surge del producto entre: (i) la proporción valores positivos sobre el área total de posibles valores del triángulo y (ii) el posible valor medio del escenario borroso.

c) *Modelos en tiempo discreto Fuzzy* (MDF): Consiste en adecuaciones del tradicional modelo binomial a la lógica borrosa. Esos permiten operar y definir la ambigüedad propia del subyacente mediante números borrosos triangulares o trapezoidales; en particular para estimar los movimientos ascendentes y descendentes (Muzzioli y Torricelli, 2004); (Yoshida *et al*., 2006); (Garcia Sastre y Roselló Miralle, 2007); (Zdnek, 2010); (Liao y Ho, 2010); (En Shine Yu *et al*., 2011).

2. DESARROLLO: LOS MODELOS BINOMIALES DE VALORACIÓN DE OPCIONES. PROBABILÍSTICO VERSUS BORROSO

2.1. El modelo binomial probabilístico

La Teoría de las Opciones reales permite capturar el valor intrínseco total de la inversión en activos reales, es decir la suma del valor intrínseco tradicional más el valor agregado propio de la flexibilidad estratégica de la inversión, este conocido como valor de las opciones reales (*VOR*) (Trigeorgis, 1995); (Trigeorgis, 1997); (Num, 2004); (Smit y Trigeorgis, 2004). Por lo tanto el valor de un proyecto, estrategia o empresa en marcha se conoce como valor estratégico o expandido (*VE*) siendo la suma entre el valor intrinseco tradicional (*VAN*) y el valor de las opciones reales (*VOR*), $VE = VAN + VOR$.

Las principales variables que afectan el valor de la opción en el tradicional modelo binomial (Cox, Ross y Rubinstein, 1979) están dadas por los factores de ascenso y descenso (*u*; *d*) que definen el recorrido del activo subyacente (V_t) Los coeficientes son calculados a partir de la volatilidad (σ) del precio correspondiente a una cartera de activos financieros gemelos o réplica de los flujos de fondos del subyacente. El supuesto base reside en que el activo sigue un proceso estocástico geométrico browniano modelado en tiempo discreto. Las ecuaciones correspondientes a los coeficientes y el recorrido aleatorio en la rejilla binomial del subyacente son;

$$u = e^{(\sigma \times \sqrt{t})} \quad (1)$$

$$d = e^{(-\sigma \times \sqrt{t})} \quad (2)$$

$$V_t = [V_{t-1} \times u ; V_{t-1} \times d] \quad (3)$$

El valor expandido del proyecto, al vencimiento, es el máximo valor entre el activo subyacente menos el precio de ejercicio (*X*), $VE_t = max(V_t - X; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de compra financieras y $VE_t = max(X - V_t; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de venta financieras. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos (p_u; p_d). Los coeficientes y el valor actual se calculan con las siguientes expresiones;

$$p_u = \frac{(1+rf)-d}{u-d} \quad (4)$$

$$p_d = 1 - p_u \quad (5)$$

$$VE_t = \left[VE_{i(t+1)} \times p_u + VE_{j(t+1)} \times p_d\right] \times (1 + rf)^{-1} \quad (6)$$

Donde (*rf*) representa la tasa libre de riesgo o valor tiempo del dinero, $VE_{i(t+1)}; VE_{j(t+1)}$ el valor expandido en los nodos inmediatos posteriores.

La volatilidad actual o presente se encuentra definida por el parámetro σ en la ecuación parcial diferencial de Black-Merton-Scholes. Esta es uno de los principales insumos del modelo BMS, del binomial (como expresion del anterior en tiempo discreto) y todas sus derivaciones conforme fueron sintetizadas en el punto 1.1. Es imposible obtener su dato a través de la observación directa en el mercado, por lo tanto debe ser calculada empleando modelos estadísticos.

Ahora bien, las medidas de volatilidad pueden clasificarse en función al instante espacial de los datos en el tiempo: (a) volatilidad histórica o realizada obtenida de las observaciones históricas de precios, brindando una medida estadística del riesgo del subyacente; (b) volatilidad implícita, siendo el número en la fórmula de BMS que hace coincidir el valor teórico con el precio actual de mercado; (c) volatilidad proyectada (a partir de la implícita) corresponde a un momento futuro del tiempo; y finalmente disociada del tiempo, (d) volatilidad de cobertura (*hedging volatility*) es el parámetro a introducir en la estimación de la letra griega delta con el fin de calcular las unidades de subyacente a vender en corto plazo con propósitos de cobertura (Wilmott, 2009). En los modelos de opciones reales, las tres primeras medidas de volatilidad sirven de insumo a los modelos de valoración. Para que ello sea posible es menester la existencia de un activo financiero o cartera correlacionada con los flujos del proyecto. Esta condición de completitud del mercado es uno de los supuestos básicos (y talón de Aquiles) en la Teoría de Opciones Reales (Wang y Halal, 2010). En muchos proyectos de inversión no existen activos financieros réplica y el mercado se torma incompleto,este hecho dificulta la aplicación de los modelos de valoración de opciones reales.

Una solución a este problema la brinda el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*); (Copeland y Antikarov; 2001). Se supone que el valor de mercado es igual al valor actual neto del proyecto obtenido del descuento de los flujos de fondos esperados, asumiendo el cumplimiento de la condición de completitud de mercado. La volatilidad (σ) se obtiene aplicando el siguiente procedimiento (Smith, 2005): Se somete a simulación Montecarlo a los flujos de fondos del proyecto y en cada iteración se obtiene la tasa de rendimiento (z). Esta surge del logaritmo correspondiente al cociente entre el valor actual neto del proyecto en el primer periodo (VAN_1) y el momento inicial (VAN_0); $z = \ln\left({}^{\mathrm{VAN_1}}/_{\mathrm{VAN_0}} - 1\right)$. El resultado de la simulación consiste en una muestra de valores (z_i), uno por iteración.

Luego se obtiene el rendimiento medio ($\bar{z} = E(z)$) y su desvío estándar (s), entre el momento 0 y 1. Finalmente la volatilidad del proyecto es igual a (σ)= ${}^{s}/_{\sqrt{\Delta t}}$. Si el intervalo de tiempo en el que se encuentran expresados los flujos de caja del proyecto es igual a 1, entonces (σ) =s.

En aquellas situaciones donde el mercado no es completo, predominando la vaguedad o ambigüedad en los datos (por ejemplo; proyectos de inversión en contextos financieros poco desarrollados, valoración de estrategias de inversión en activos reales producto de innovaciones, empresas de base tecnológica o empresas cerradas sin comparables), los modelos de valoración de opciones bajo la lógica borrosa (*fuzzy*) constituyen un complemento y alternativa a ser considerada, en particular el binomial como complemento de su par probabilístico.

2.2. El modelo binomial borroso

La lógica borrosa aplicada a los modelos de opciones permite complementar el enfoque de valuación probabilística trabajando en un marco de posibilidades[1]. Esta se complementa con la técnicas de escenarios y simulación, permitiendo capturar el sesgo positivo en la distribucion de los posibles valores de la inversión, rasgo característico de las opciones reales contenidas en el activo (valor el potencial beneficio de la inversión limitando el riesgo de las posibles pérdidas).

Al igual que su el modelo binomial probabilístico, este requiere estimar los coeficientes de ascenso y descenso, en este caso borrosos dando un área de posibles valores (Ecuaciones 7 y 8).

$$\mathbf{u}' = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [\mathbf{e}^{(((1-CV)\times\sigma)\times\sqrt{t})}, \mathbf{e}^{(\sigma\times\sqrt{t})}, \mathbf{e}^{(((1+CV)\times\sigma)\times\sqrt{t})}] \quad (7)$$

$$\mathbf{d}' = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3] = \left[\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}\right] \quad (8)$$

Los valores extremos son $u'=[u_1, u_2, u_3]$ (ascenso) y $d'=[d_1, d_2, d_3]$ (descenso). Los escenarios representados son: $u_1;d_1$ menor amplitud de movimiento, $u_3;d_3$ mayor amplitud de movimiento y $u_2;d_2$ caso base. Estos son calculados utilizando el coeficiente de variación (*CV*), como medida del posible intervalo de máximo a mínimo valor para la medida volatilidad (σ) (Liao y Ho, 2010), supuesto esta en basea a la opinión y juicios de expertos. En la medida que no existan activos financieros réplica esta puede ser obtenida aplicando técnicas de simulación conforme fue explicado en el punto precedente.

Debido al sesgo que existe en la distribución de posibilidad triangular el factor de ascenso crea mayor valor que el descenso, siendo el último el que los revierte a cero. El caso base arroja similares resultados a los obtenidos en el modelo binomial. Los tres resultados crean la distribución de posibilidad arrojando un número borroso, en este caso triangular, para cada uno de los nodos de la rejilla binomial (Ecuación 9).

$$V'_t = [V'_{t-1} \times u'; V'_{t-1} \times d'] \quad (9)$$

Idénticamente que en el modelo binomial, el valor expandido borroso del proyecto al vencimiento, es el máximo valor entre el activo subyacente borroso menos el precio de ejercicio (*X*), $VE'_t = max(V'_t - X; 0)$ para opciones reales

[1] Desde el punto de vista semántico, el concepto de posibilidad empleado para describir escalas de ambigüedad, constituye un criterio de fácil comprensión para la toma de decisiones empresariales, (Kinnunen, 2010).

asimilables a opciones de compra financieras y $VE'_t = max(X - V'_t ; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de venta financieras. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos borrosos (p'_u ; p'_d);

$$p'_u = \frac{(1+r) - d'}{u' - d'} \tag{10}$$

$$p'_d = 1 - p'_u \tag{11}$$

El modelo binomial borroso crea una distribución de posibilidad en cada nodo que maximiza y minimiza el área de posibles valores correspondiente al activo real subyacente. Los pares de coeficientes equivalentes ciertos a ser utilizados en el proceso recursivo son combinados de la siguiente manera, (Liao y Ho, 2010): (a) el escenario de menor amplitud combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de mínimo valor; (b) el escenario de mayor amplitud de movimiento combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de máximo[2]. El caso base se resuelve de similar manera al tradicional modelo binomial. Así se logra la asimetría en la estimación de los posibles valores. Suponiendo un número borroso triangular con coeficientes de ascenso u'= (1 menor, 2 base, 3 mayor); las parejas de coeficientes equivalentes ciertos borrosos a utilizar en el proceso recursivo quedan planteadas de la siguiente manera:

$$p'_u , p'_d = [(p'_{u3} , p'_{d1}); (p'_{u2} , p'_{d2}); (p'_{u1} , p'_{d3})] \tag{12}$$

El sesgo positivo correspondiente al número borroso (valor de la opción) es capturado reordenando los pares de coeficientes equivalentes ciertos (Ecuación 12). Por lo tanto la menor (mayor) ponderación es asignada a los valores del escenario de menor (mayor) amplitud. Entonces el coeficiente equivalente cierto surge del cociente entre la diferencia del factor de crecimiento al tipo sin riesgo menos el movimiento de descenso (numerador) y la diferencia entre el factor de ascenso y descenso (denominador). Al ser el tipo sin riesgo constante la variación se encuentra en los valores de los movimientos. El coeficiente equivalente cierto obtenido del movimiento de mayor (menor) amplitud, presenta menor (mayor) numerador y mayor (menor) denominador. Por lo tanto es utilizado en la ponderación del ascenso para el valor de menor (mayor) amplitud; y su complemento en el descenso de menor (mayor) amplitud.

[2] El valor de las opciones reales es función directa de la volatilidad y los movimientos de ascenso y descenso están en función directa con esta. Por lo tanto, a mayor amplitud de movimientos, mayor valor de la opción y viceversa. Esto conduce a suponer que escenarios optimistas (pesimistas) vinculados al proyecto se relacionan con volatilidad respecto del caso base mayor (menor) y con movimientos respecto del caso base de mayor (menor) amplitud.

Por lo tanto:

$$u'_3 > u'_2 > u'_1 \rightarrow d'_3 < d'_2 < d'_1 \rightarrow p'_3 < p'_2 < p'_1 \rightarrow (1 - p'_3) > (1 - p'_2) > (1 - p'_1)$$

El valor intrínseco expandido se determina recursivamente mediante la siguiente expresión:

$$\mathrm{VE}'_t = [\mathrm{VE}'_{i(t+1)} \times p'_u + \mathrm{VE}'_{j(t+1)} \times p'_d] \times (1 + rf)^{-1} \qquad (13)$$

El cálculo del valor central correspondiente al número borroso se ve alterado por el sesgo de hacia la derecha que tiene la distribución de posibles valores del proyecto. Suponiendo que $VE' = [\mathrm{VE}_1(\alpha); \mathrm{VE}_3(\alpha)]$ es un número borroso y $\lambda \in [0,1]$, el valor actual neto esperado borroso (VANEB), *E(VE)*´, se define como:

$$\mathbf{E(VE')} = \int_0^1 [(1 - \lambda)\mathrm{VE}_1(\alpha) + \lambda \mathrm{VE}_3(\alpha)]d\alpha \qquad (14)$$

Donde λ representa el índice ponderado de “pesimismo-optimismo”; (Yoshida *et al*., 2006); (Liao y Ho, 2010) es estimado mediante la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{AD}{AI + AD} \qquad (15)$$

Estimado el índice, se sustituye en la Ecuación 15 y se obtiene el valor actual neto esperado borroso de la opción (Ecuación 16):

$$\mathrm{E(VE')} = \frac{[(1-\lambda)\mathrm{VE}_1 + \mathrm{VE}_2 + \lambda \mathrm{VE}_3]}{2} \qquad (16)$$

3. UN CASO DE APLICACIÓN: PROYECTO DE INVERSIÓN VALORACIÓN DE LA OPCIÓN DE INVERTIR-CONTINUAR-ABANDONAR

A continuación se desarrollará un ejemplo hipotético en donde se valora la opción de diferir con el objeto de comparar los resultados arrojados por el modelo binomial en sus versiones probabilísticos y borrosos.

El valor actual de los flujos de fondos operativos del proyecto es de \$1.000. Este requiere de inversiones secuenciales programadas en el periodo uno y tres de \$400 y \$800 respectivamente con el fin de continuar con el emprendimiento. La tasa libre de riesgo es del 5% anual (*r*) y el desvío de los flujos de fondos operativos asciende a 35% (*σ*).

El valor intrínseco se determina de la siguiente manera; $-\$69{,}06 = 1000 - 400\,e^{-0.05\times 1} - 800e^{-0.05\times 3}$; conduciendo al rechazo del proyecto. El resultado sería correcto en la medida que no existan opciones o flexibilidad estratégica contenidas en la inversión bajo consideración. Un punto débil en el método estático de valoración (descuento de flujos de fondos) reside en suponer irreversibilidad en las inversiones (Dixit y Pindyck, 1994).

El valor proveniente de las opciones estratégicas de las empresas constituye una parte significativa del valor expandido de la inversión. En el caso bajo estudio la flexibilidad estratégica surge del carácter reversible pero necesario de las inversiones en activos fijos. La opción de continuidad se ejerce en el primer y tercer periodo, en la medida que el valor actual del subyacente supere a la inversión. Caso contrario se ejerce la opción de abandono con costos (CA) de t=1 \$75; t=3 \$125 e ingresos por liquidación (IL) t=1 \$100; t=3 \$200 respectivamente. Con los datos de tasa libre de riesgo y desvío de los flujos se calculan los coeficientes de ascenso y descenso (Ecuaciones 1 y 2), (TABLA 1). Con tales insumos se proyecta la rejilla[3] de recorrido del subyacente (Ecuación 3) partiendo de su valor actual inicial (\$1000) y los coeficientes equivalentes ciertos estimados precedentemente (Ecuaciones 4 y 5) (TABLA 2).

En el ejemplo, las opciones reales de continuidad-abandono se asemejan a una combinación de opciones de compra y venta financiera con diferentes precios de ejercicio. Esta estrategia se conoce como *straddle,* la opción de compra se activa cuando el valor del subyacente supera el precio de ejercicio y la venta en el caso que el subyacente se encuentre por debajo del precio de ejercicio. El perfil de este tipo de estrategia tiene por objeto cubrir subyacentes con alta volatilidad (dispersión respecto del precio de ejercicio), en términos de proyectos de inversión sería el caso de innovaciones o emprendimientos tecnológicos.

En el caso de activos reales la inversión se ejerce cuando el valor intrínseco del proyecto supera la inversión y el abandono o venta cuando la diferencia entre el valor intrínseco menos la inversión sea inferior a la diferencia entre los ingresos por liquidación menos costos de abandono. En el periodo 3 valor terminal de la opción es igual a $\mathrm{VE}_3 = \max[(\mathrm{V}_3 - \mathrm{I}_3);\ (\mathrm{IL}_3 - \mathrm{CA}_3)]$. Para el periodo 1 el valor terminal es igual a

$$\mathrm{VE}_1 = \max\left[\left(p_u \times \mathrm{V}_{2,u} + p_d \times V_{2,d}\right) \times \mathrm{e}^{-r} - \mathrm{I}_1\right); (\mathrm{IL}_1 - \mathrm{CA}_1)\big].$$

Finalmente la rejilla binomial se resuelve recursivamente (Ecuación 6). En la TABLA 3 se presenta la determinación del valor expandido.

[3] A los fines de la valoración y por las ventajas propias de la recombinación se emplean rejillas binomiales en lugar de árboles de decisión. La disposición gráfica de los árboles los torna en un instrumento de gran utilidad para el análisis estratégico, siendo la rejillas la versión simplificada a los efectos computacionales (Smith, 2005).

En el ejemplo el valor expandido (VE) asciende a $157,86, siendo el valor de las opciones reales (VOR)[4] de $226,92. Esto resultados conducen a tomar la decisión de continuar el proyecto condicionado al ejercicio de las opciones contenidas en este. A continuación el proyecto será valorado utilizando el modelo binomial borroso.

Los coeficientes de ascenso y descenso son estimados utilizando el coeficiente de variación (*CV*) de los flujos de fondos, como medida del posible intervalo de máximo a mínimo valor que se supone tomará la volatilidad (σ). Esta es la base del esquema borroso triangular del modelo, diferenciándose del modelo binomial que trabaja con una estimación puntual del parámetro. El CV se supone del 15% siendo el valor del desvió (a) con escala de posibilidad 1 de σ =35%. Los valores extremos son: $a - \alpha = \sigma \times (1 - CV) = 29{,}75\%$ y $a + \beta = \sigma \times (1 + CV) = 40{,}25\%$. (TABLA 4).

Obtenido el rango de volatilidad se procede a calcular los movimientos ascendentes y descendentes borrosos (Ecuaciones 7 y 8) (TABLA 5).

Estos coeficientes son utilizados para proyectar el recorrido del subyacente originando una rejilla binomial borrosa (Ecuación 9) (TABLA 6). Los nodos contienen valores borrosos mediante números triangulares. A modo de ejemplo se observa que para el primer periodo (t=1, nodo ascendente; descendente) los valores son dispuestos en el siguiente orden: menor amplitud (1: $1346,49; $742,67), base (2: $1419,07; 704,69) y mayor amplitud (3: $1495,56; 668,65).

Conforme fue explicado, los coeficientes equivalentes ciertos (Ecuación 10 y 11) son agrupados en mayor (menor) valor según la mayor (menor) amplitud de movimientos, no variando el caso base (Ecuación 12). Estos son expuestos en la TABLA 7.

Cabe destacar que la estimación del valor terminal en la rejilla se realiza de similar manera que en el método binomial probabilístico. El valor terminal de la opción en el periodo 3 es igual a $VE'_3 = \max[(V'_3 - I_3);\ (IL_3 - CA_3)]$.

Para el periodo 1 el valor terminal es igual a $VE'_1 = \max[(p'_u \times V'_{2,u} + p'_d \times V'_{2,d}) \times e^{-r} - I_1); (IL_1 - CA_1)]$.

La valoración se realiza aplicando el proceso recursivo (Ecuación 13), conforme se expone en la TABLA 8.

4 *VE=VAN+VOR; VOR=VE-VAN*

El área que contiene los posibles valores del proyecto está delimitada por el número borroso triangular [$72,10; $157,86; $278,34]; el valor de mayor posibilidad es el mismo que el obtenido en el modelo binomial, más no representa el valor esperado borroso. La determinación del valor actual neto esperado borroso (VANEB) requiere: (i) estimar la proporción que representa el área por encima ($a+\beta$) y debajo ($a-\alpha$) (Ecuación 15) y (ii) los valores expandidos borrosos (VE´). Las variables indicadas son los insumos de la Ecuación 16, en la TABLA 9 se presenta su cálculo.

En el ejemplo, el valor expandido binomial tradicional asciende a $157,86 y difiere del VANEB el cuál es de $175,22. Esto es así producto del sesgo positivo debido a la mayor ponderación asignada por los coeficientes equivalentes ciertos borrosos a los movimientos de mayor amplitud en relación a los de menor amplitud.

4. CONCLUSIONES

La valuación de emprendimientos, estrategias, activos es un proceso intelectual donde el conocimiento sobre el emprendimiento es traducido a una medida de valor que incorpora el riesgo inherente a la decisión. Para ello es condición necesaria el empleo de modelos de valoración, los cuales independientemente de su complejidad, son aproximaciones simplificadas a la compleja tarea de representar el valor empresarial. Los activos reales (proyectos de inversión, empresas en marcha, estrategias empresariales) se caracterizan por su carácter dinámico, donde los modelos de opciones reales son aquellos que mejor describen la flexibilidad estratégica y por ende el valor expandido del activo real.

En la primer parte del trabajo se clasificaron y referenciaron los modelos de valuación de opciones reales según su base probabilística o borrosa. De todos ellos se abordó el modelo binomial contrastándolo con su variante borrosa. El caso de estudio comparó los resultados de los modelos binomiales probabilístico y borroso sobre un emprendimiento con inversiones secuenciales de invertir-continuar o en su defecto abandonar. En términos de opciones financieras se está frente a una combinación conocida como *straddle*, estrategia destinada a cubrir altas volatilidades del subyacente, en términos de opciones reales emprendimientos en innovaciones o emprendimientos de base tecnológico. Asimismo se expone el grado asimétrico del valor esperado borroso, con sesgo sobre los valores positivos por sobre los negativos. Es una estrategia propicia para proyectos de alto riesgo y con flexibilidad estratégica incorporada ya que las pérdidas se limitan y las ganancias se potencian.

El modelo binomial borroso es un complemento ideal del tradicional enfoque binomial probabilístico.

Se constituye en una propicia herramienta de valoración en situaciones de vaguedad o ambigüedad de datos, como el caso de proyectos innovadores, nuevos desarrollos tecnológicos o inexistencia de activos financieros réplicas del riesgo de los flujos de fondos del emprendimiento.

5. FIGURAS Y TABLAS

FIGURA 1: Modelos de valoración de opciones probabilístico y borrosos (elaboración propia)

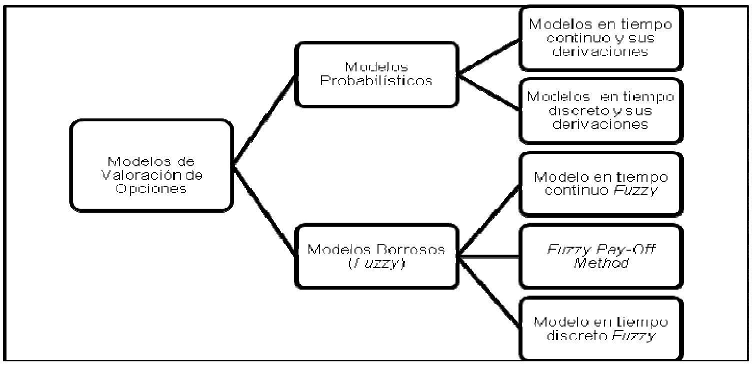

TABLA 1: Parámetros y coeficientes equivalentes ciertos binomial (elaboración propia)

U	*d*	*p*	*1-p*
1,419	0,705	0,485	0,515

TABLA 2: Rejilla binomial valor intrínseco del activo (elaboración propia)

0	1	2	3
$ 1.000,00	$ 1.419,07	$ 2.013,75	$ 2.857,65
	$ 704,69	$ 1.000,00	$ 1.419,07
		$ 496,59	$ 704,69
			$ 349,94

TABLA 3: Rejilla binomial valor intrínseco con opción de inversión-abandono (elaboración propia)

0	1	2	3
$ 157,86	$ 315,54	$ 1.252,77	$ 2.057,65
	$ 25,00	$ 322,42	$ 619,07
		$ 71,34	$ 75,00
			$ 75,00

TABLA 4: Volatilidad borrosa (elaboración propia)

Extremos	Volatilidad borrosa
a, ε(1)	35,00%
a-α, ε(0)	29,75%
a+β, ε(0)	40,25%

TABLA 5: Parámetros ascenso – descenso (elaboración propia)

NBT	u'		d'	
a-α	u'1	1,34648838	d'1	0,74267258
a	u'2	1,41906755	d'2	0,70468809
a+β	u'3	1,49555893	d'3	0,66864634

TABLA 6: Rejilla binomial borrosa valor intrínseco del activo (elaboración propia)

0	1	2	3
$ 1.000,00	$ 1.346,49	$ 1.813,03	$ 2.441,23
	$ 1.419,07	$ 2.013,75	$ 2.857,65
	$ 1.495,56	$ 2.236,70	$ 3.345,11
	$ 742,67	$ 1.000,00	$ 1.346,49
	$ 704,69	$ 1.000,00	$ 1.419,07
	$ 668,65	$ 1.000,00	$ 1.495,56
		$ 551,56	$ 742,67
		$ 496,59	$ 704,69
		$ 447,09	$ 668,65
			$ 409,63
			$ 349,94
			$ 298,94

TABLA 7: Coeficientes equivalentes ciertos borrosos (elaboración propia)

NBT	p'		1-p'	
a-α	p'1	0,51108056	1-p'1	0,48891944
a	p'2	0,48515254	1-p'2	0,51484746
a+β	p'3	0,46271488	1-p'3	0,53728512
Pares	p'		1-p'	
Menor	p'3	0,46271488	1-p'1	0,48891944
Base	p'2	0,48515254	1-p'2	0,51484746
Mayor	p'1	0,51108056	1-p'3	0,53728512

TABLA 8: Rejilla binomial borrosa valor intrínseco con opción de inversión-abandono (elaboración propia)

		0	1	2	3
VE'1	Pesimista	$ 72,10	$ 137,40	$ 976,54	$ 1.641,23
VE'2	Base	$ 157,86	$ 315,54	$ 1.252,77	$ 2.057,65
VE´3	Optimista	$ 278,34	$ 546,25	$ 1.592,81	$ 2.545,11
			$ 25,00	$ 275,42	$ 546,49
			$ 25,00	$ 322,42	$ 619,07
			$ 25,00	$ 376,48	$ 695,56
				$ 67,89	$ 75,00
				$ 71,34	$ 75,00
				$ 74,79	$ 75,00
					$ 75,00
					$ 75,00
					$ 75,00

TABLA 9: Valor actual neto esperado borroso (VANEB) (elaboración propia)

VANEB (Valor actual neto esperado borroso)		
Base	c3-c2	$ 120,48
Altura	1	1
ARD	*(b*h)/2*	$ 60,24
Base	c2-c1	$ 85,76
Altura	1	1
ARD	*(b*h)/2*	$ 42,88
λ (Ec.15)	ARD/ARL+ARD	0,584
VANEB (Ec,16)	((1-λ)C1+C2+λC3)/2	$ 175,22
VE´ binomial probabilistico		$ 157,86
VANEB		$ 175,22
VE´inferior		$ 72,10
VE´superior		$ 278,34

6. REFERENCIAS

- AMRAM, M.; KULATILAKA, N. (1998): "REAL OPTIONS" (1 ed.). Boston, Masachussets, Estados Unidos: Harvard Business School Prees.

- ARNOLD, T.; CRACK, T. (2004): "USING THE WACC TO VALUE REAL OPTIONS". Financial Analysts Journal(60), 78-82.

- ARNOLD, T.; CRACK, T.; SCHWARTZ, A. (2004): "IMPLIED BINOMIAL TREES IN EXCEL WHITOUT VBA". SSRN: Social Science Research NetWork .

- BALIERO FILHO, R.; ROSENFELD, R. (2004): "TESTING OPTION PRICING WITH EDGEWORTH EXPANSION". Physica A: Statistical Mechanis an its Application, 344, 484-490.

- BLACK, F.; SCHOLES, M. (1973): "THE PRICING OF OPTIONS AND CORPORATE LIABILITIES". Journal of Political Economy, 637-659.

- BOYLE, P. (1988): "A LATTICE FRAMEWORK FOR OPTION PRICING WITH TWO STATE VARIABLES". Journal of Finance and Quantitative Analysis, 23, 1-12.

- BRANDAO, L.; DYER, J.; HAHN, W. (2005): "USING BINOMIAL DECISION TREES TO SOLVE REAL OPTIONS VALUATIONS PROBLEMS". Journal of Decision Analysis(2), 69-88.

- BRANDAO, L.; DYER, J. (2009): "PROJETOS DE OPCOES REIS COM INCERTEZAS CORRELACIONADAS". Revista de Administracao e Contabilidade da Unisinos(1), 19-26.

- CARLSSON, C.; FULLER, R. (2001): "ON POSSIBILISTIC MEAN VALUE AND VARIANCE FUZZY NUMBERS". Fuzzy Sets and Systems(122), 772-777.

- CARLSSON, C.; FULLER, R. (2003): "A FUZZY APPROACH TO REAL OPTION VALUATION". Fuzzy Sets and Systems(139), 315-326.

- CARLSSON, C.; FULLER, R.; HEIKKILA, M.; MAJLENDER, P. (2007): "A FUZZY APPROACH TO R&D PROJECT PORTFOLIO SELECTION". Interntational Journal of Approximating Reasoning(44), 93-105.

- COLLAN, M.; FULLÉR, R.; MEZEI, J. (2009): "FUZZY PAY-OFF METHOD FOR REAL OPTION VALUATION". Journal of Applied Mathematics and Decision Systems, ID 238196, 1-14.

- COPELAND, T.; ANTIKAROV, V. (2001): “REAL OPTIONS” (1 ed.). New York: Texere LLC.

- COPELAND, T.; TUFANO, P. (2004): “A REAL WORLD TO MANAGE REAL OPTIONS”. Harvard Business School Review(82), 90-99.

- COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. (Septiembre de 1979): “OPTION PRICING: A SIMPLIFIED APPROACH”. Journal of Financial Economics, 229-263.

- DATAR, V.; MATEWS, S.; JOHNSON, B. (2007): “A PRACTICAL METHOD FOR VALUING REAL OPTIONS: THE BOEING APPROACH”. Journal of Applied Corporate Finance, 19, 95-104.

- DATAR, V.; MATHEWS, S. (2004): “EUROPEAN REAL OPTIONS: AN INTUITIVE ALGORITHM FOR THE BLACK-SCHOLES FORMULA”. Journal of Applied Finance, 14, 7-13.

- DERMAN, E.; KANI, I.; CHRISS, N. (1996): “IMPLIED TRINOMIAL TREES OF THE VOLATILITY SMILE”. (Goldman-Sachs, Ed.) Quantitative strategies research notes.

- DIXIT, A.; PINDYCK, R. (1994): “INVESTMENT UNDER UNCERTAINTY” (1 ed.). New Jersey: Pricenton University Press.

- DUBOIS, D.; PRADE, H. (1980): “FUZZY SETS AND SYSTEMS”. New York: Academic Press.

- EN SHINE YU, S.; MING, H.; LI, Y.; CHEN YUAN, L. (2011): “A NOVEL OPTION PRICING MODEL VIA FUZZY BINOMIAL DECISION TREE”. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 7(2), 709-718.

- FORNERO, R. (2012): “EL VALOR DE LOS PROYECTOS DE INVERSIÓN CON ESTIMACIONES PROBABILISTICAS Y BORROSAS”. XXXII Jornadas Nacionales de Administración Financiera, XXXII, 83-135.

- FULLER, R.; MAJLENDER, P. (2003): “ON WEIGTHED POSSIBILISTIC MEAN AND VARIANCE OF FUZZY NUMBERS”. Fuzzy Sets and Systems(136), 363-374.

- HAAHTELA, T. (2010): “DISPLACED DIFFUSION BINOMIAL TREE FOR REAL OPTION VALUATION”. SSRN: SSRN-Social Science Research Network. Obtenido de www.ssrn.com.

- HAAHTELA, T. (2010): "RECOMBINING TRINOMIAL TREE FOR REAL OPTION VALUATION WITH CHANGING VOLATILITY". SSRN-Social Science Research Network. Obtenido de www.ssrn.com.

- HAAHTELA, T. (2011): "ESTIMATING CHANGING VOLATILITY IN CASH FLOW SIMULATION BASED REAL OPTIONS VALUATION WITH REGRESSION SUM OF SQUARED ERROR METHOD". SSRN: Social Science Research Network.

- HAUG GAARDER, E. (2007): "DERIVATIVES: MODELS OND MODELS" (1 ed.). Chichester : John Wiley & Sons.

- HULL, J. (2006): "FUTURES, OPTIONS AND OTHER DERIVATIVES" (6 ed.). New Jersey: Prentice Hall.

- GARCIA SASTRE, M.; ROSELLÓ MIRALLES, M. (2007): "LA LÓGICA BORROSA PARA VALORAR LA INCERTIDUMBRE EN LA TÉCNICA DE VALORACIÓN DE OPCIONES REALES". (A. E. (AEDEM), Ed.) DIALNET OAI Articles, http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaiart?codigo=2499409, 1-22.

- JABBOUR, G.; KRAMIN, M.; YOUNG, S. (2001): "TWO-STATE OPTION PRICING: BINOMIAL MODELS REVISITED". Journal of Futures Markets, 21, 987-1001.

- JARROW, R.; RUDD, A. (1982): "APROXIMATE OPTION VALUATION FOR ARBITRARY STOCHASTIC PROCESSES". Journal of Financial Economics, 10, 347-369.

- KAHRAMAN,C; RUAN, D.; TOLGA, E. (2002): "CAPITAL BUDGETING TECHNIQUES USING DISCOUNTED FUZZY VERSUS PROBABILISTICS CASH FLOW". Information Science (142), 57-76.

- KINNUNEN, J. (2010): "VALUING M&A SYNERGIES AS (FUZZY) REAL OPTIONS". Abo Akedimi University.

- LEÓN, A.; MENCIA, J.; SENTARIA, E. (2007): "PARAMETRIC PROPERTIES OF SEMI-NONPARAMETRIC DISTRIBUTIONS, WITH APPLICATION TO OPTIONS VALUATION". Documento de Trabajo 0707 Banco de España, 9-30.

- LIAO, S.; HO, S. (2010): "INVESTMENT PROJECT VALUATION BASED ON A FUZZY BIONOMIAL APPROACH". Information Sciences(180), 2124-2133.

- LUHERMAN, T. (1998): "INVESTMENT SCIENCE" (1 ed.). New York: Oxford University Press.

- LUHERMAN, T. (1998): "INVESTMENT OPPORTUNITIES AS REAL OPTIONS: GET STARTED WITH THE NUMBERS". Harvard Business Review(4), 51-67.

- MERTON, R. (1973): "THE THEORY OF RATIONAL OPTIONS PRINCING". Bell Journal of Economics and Management Science, 141-183.

- MILANESI, G. (2012): "OPCIONES REALES: EL MÉTODO BINOMIAL, ASIMETRÍA Y CURTOSIS EN LA VALORACIÓN DE EMPRESAS DE BASE TECNOLÓGICA". Revista Española de Capital de Riesgo(2), 41-55.

- MUN, J. (2004): "REAL OPTIONS ANALYSIS: TOOLS AND TECHNIQUES FOR VALUING STRATEGIC INVESTMENT AND DECISIONS" (1 ed.). New York: Wiley.

- MUZZIOLI, S.; TORRICELLI, A. (2004): "A MULTIPERIOD BINOMIAL MODEL FOR PRICING OPTIONS IN A VAGUE WORLD". Journal of Economics and Dynamics Control(28), 861-867.

- RENDLEMAN, R.; BARTTER, B. (1979): "TWO-STATE OPTION PRICING". Journal of Finance(34), 1092-1110.

- RUBINSTEIN, M. (1994): "IMPLIED BINOMIAL TREES". Journal of Finance, 49, 771-818.

- RUBINSTEIN, M. (1998): "EDGEWORTH BINOMIAL TREES". Journal of Derivatives(5), 20-27.

- RUBINSTEIN, M. (2000): "ON THE RELATION BETWEEN BINOMIAL AND TRINOMIAL OPTION PRICING MODEL". Berkeley, Research Program in Finance-292. California: UC Berkeley.

- SMIT, H.; TRIGEORGIS, L. (2004): "STRATEGIC INVESTMENT: REAL OPTIONS AND GAMES" (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.

- SMITH, J. (2005): "ALTERNATIVE APPROACH FOR SOLVING REAL OPTIONS PROBLEMS". Decision Analysis(2), 89-102.

- SMITH, J.; NAU, R. (1995): "VALUING RISKY PROJECTS: OPTION PRICING THEORY AND DECISION ANAYSIS". Management Science(5), 795-816.

- TRIGEORGIS, L.; MASON, S. (1987): "VALUING MANAGERIAL FLEXIBILIY". Midland Corporate Finance, 5, 14-21.

- TRIGEORGIS, L. (1988): "A CONCEPTUAL OPTIONS FRAMEWORK FOR CAPITAL BUDGETING". Advances in Futures and Options Research(4), 145-167.

- TRIGEORGIS, L. (1995): "REAL OPTIONS IN CAPITAL INVESTMENT: MODELS, STRATEGIES AND APPLICATIONS" (1 ed.). London, United Kindgon: Praeger.

- TRIGEORGIS, L. (1997): "REAL OPTIONS: MANAGERIAL FLEXIBILITY AND STRATEGY IN RESOURCE ALLOCATIONS" (2 ed.). Cambridge: MIT Press.

- WANG, A.; HALAL, W. (2010): "COMPARISION OF REAL ASSET VALUATION MODELS: A LITERATURE REVIEW". International Journal of Business and Management(5), 14-24.

- WILMOTT, P. (2009): "FREQUENTLY ASKED QUESTIONS IN QUANTITATIVE FINANCE" (Segunda ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.

- YOSHIDA, Y.; YASUDA, M.; NAKAGAMI, J.; KURANO, M. (2006): "A NEW EVALUATION OF MEAN VALUE FOR FUZZY NUMBERS AND ITS APPLICATION TO AMERICAN OPTIONS UNDER UNCERTAINTY". Fuzzy Sets and Systems(157), 2614-2626.

- ZADEH, L. (1965): "FUZZY SETS". Information Control, 3(8), 338-353.

- ZDNEK, Z. (2010): "GENERALISED SOFT BINOMIAL AMERICAN REAL OPTION PRICING MODEL". European Journal of Operational Research(207), 1096-1103.