Definiciones implícitas y estructuralismo matemático *ante rem*

Eduardo N. Giovannini*,‡
Mayra Huespe*

Introducción

El método de las definiciones implícitas juega un papel central en la filosofía contemporánea de la matemática, en particular en el debate sobre el estructuralismo matemático. Esta influyente posición filosófica sostiene que la matemática no se ocupa del estudio de las 'propiedades internas' de sus objetos, sino más bien del modo en que estos objetos se 'relacionan entre sí' (Shapiro, 1997; Parsons, 1990). Para el estructuralismo matemático, las teorías matemáticas describen estructuras abstractas, en oposición a sistemas particulares de objetos y relaciones que ejemplifican estas estructuras. Por ejemplo, la aritmética de Peano describe la estructura de los números naturales, que puede ser interpretada o tener un modelo en diversos sistemas conjuntistas; el análisis matemático describe la estructura de los números reales, la geometría la estructura de diferentes espacios, y así sucesivamente.

El estructuralismo *ante rem* defendido por Shapiro (1997) constituye una de las variantes más elaboradas del estructuralismo matemático. Esta variante postula a las estructuras como entidades existentes en un dominio abstracto. Más precisamente, para el estructuralismo *ante rem* las estructuras abstractas y las posiciones deben ser consideradas como objetos *bona fide* que existen independientemente de los sistemas de objetos que constituyen sus instanciaciones concretas. En otras palabras, esta variante del estructuralismo matemático se caracteriza por postular la independencia ontológica de las estructuras y los 'lugares' o 'posiciones' en las estructuras respecto de los sistemas particulares de objetos que las instancian o ejemplifican. En este contexto, una piedra angular de la epistemología del estructuralismo *ante rem* consiste en la tesis según la cual las

* Universidad Nacional del Litoral (UNL).

‡ CONICET.
mayrahuespe@hotmail.com

definiciones implícitas, *i.e.*, las axiomatizaciones de teorías matemáticas, nos proporcionan un acceso a las estructuras 'puras' y a las 'posiciones' en las estructuras.

Ahora bien, a pesar del papel central que desempeña el método de las definiciones implícitas en el estructuralismo *ante rem* desarrollado por Shapiro (1997), resulta llamativo que la noción misma de definición implícita es descripta allí de un modo esquemático, e incluso a veces informal. El objetivo del presente trabajo es examinar críticamente el papel desempeñado por el método de las definiciones implícitas en la variante del estructuralismo matemático *ante rem* elaborada por Shapiro (1997). En primer lugar, sostendremos que, en la descripción de dicho método presentada por este autor, es posible distinguir dos nociones diferentes de definición implícita. Esquemáticamente, por un lado, una primera noción según la cual una definición implícita consiste en la especificación por medio de un sistema de axiomas del significado de los términos primitivos de una teoría matemática. Por ejemplo, en el caso de la axiomatización de la geometría euclídea elaborada por Hilbert (1899), los axiomas de dicha teoría proporcionan una definición implícita de los conceptos primitivos 'punto', 'línea', 'plano', 'estar en', 'estar entre', etc. Por otro lado, una segunda noción de definición implícita, según la cual un conjunto de axiomas define un concepto de objeto matemático de orden superior, o más precisamente, una clase de modelos o estructuras. En el ejemplo antes mencionado, los axiomas de Hilbert (1899) definen el concepto de orden superior de espacio euclídeo tridimensional. Luego, una segunda tesis que defenderemos en este trabajo consiste en sostener que estas dos nociones de definición implícita no sólo difieren en cuanto a su funcionamiento semántico, sino además en lo que respecta a sus criterios de éxito o adecuación.

El trabajo estará estructurado de la siguiente manera. En primer lugar, realizaremos una presentación esquemática de la versión del estructuralismo *ante rem* propuesta por Shapiro. En particular, prestaremos especial atención a la distinción trazada por este autor entre teorías matemáticas "algebraicas" y "no-algebraicas". En segundo lugar, analizaremos las dos nociones de definición implícita antes mencionadas y examinaremos cómo dichas nociones pueden ser caracterizadas de un modo más preciso en términos modelo-teóricos. En tercer lugar, discutiremos el papel epistemológico asignado por Shapiro a dichas nociones, y en particular, identificaremos una serie de problemas en relación los criterios de adecuación de "unicidad" y "existencia" que deben satisfacer ambas nociones de definición implícita.

El estructuralismo matemático *ante rem*

Shapiro (1997) afirma que las estructuras matemáticas están conformadas por lugares o posiciones que mantienen entre sí relaciones de carácter formal. A tales lugares los pueden ocupar diversos tipos objetos que respetan las relaciones formales en cuestión. Estos conjuntos de objetos que instancian las estructuras reciben el nombre de sistemas. Tanto las estructuras como los lugares son ontológicamente independientes de los sistemas y los objetos que las instancian. Esta independencia está estrechamente vinculada con el carácter formal de las relaciones entre las posiciones de las estructuras. Los objetos que componen los sistemas pueden estar relacionados de otros modos, además de formalmente. Por lo cual, tales elementos pueden tener otras propiedades, además de las estructurales, como por ejemplo propiedades físicas. Las posiciones, por el contrario, únicamente tienen propiedades de carácter formal o estructural. Lo único que importa de ellas es cómo se relacionan con los demás elementos de la estructura.

Desde cierta perspectiva, las estructuras pueden ser analizadas como sistemas. Por lo cual, todas las estructuras pueden ejemplificarse a sí mismas. Esta relativización conceptual se entiende mejor a la luz de las perspectivas *places are offices* y *places are objects.* Desde la primera de ellas, las estructuras se analizan en los términos de los sistemas que las ejemplifican y los lugares en base a los objetos que los ocupan. Los supuestos términos singulares que refieren a las posiciones se interpretan como variables ocultas. Desde esta perspectiva, los numerales son interpretados como variables cuyos rangos son todos los objetos de los sistemas que ejemplifican a la estructura de la aritmética. Por el contrario, la perspectiva *places are objects* permite analizar a los lugares como objetos *bona fide*. Los términos singulares recuperan su estatus. De allí que, una estructura dada –analizada desde la perspectiva *places are objects*– puede ejemplificarse a sí misma. Pese a la validez teórica de ambas perspectivas, las tesis ontológicas centrales del estructuralismo *ante rem* son formuladas desde la perspectiva *places are objects.* En sí misma, la validez teórica de las dos perspectivas no es más que un resultado del realismo estructural defendido por el autor.

Para Shapiro, las teorías matemáticas algebraicas son aquellas que estudian diferentes clases de modelos no equivalentes, como por ejemplo la teoría de grupos y la teoría de anillos. Contrariamente, las teorías no algebraicas, como por ejemplo la aritmética, estudian clases de modelos equivalentes:

> A field is nonalgebraic if it has a single "intended" interpretation among its possible models or, more precisely, if all of its "intended" models are isomorphic (or at least equivalent).... A field is algebraic if it has a broad class of (nonequivalent) models. Group theory, for example, is about all groups. (Shapiro, 1997, p. 50)

Siguiendo esta distinción, las teorías matemáticas no algebraicas estudian ciertos dominios matemáticos definidos y las teorías algébricas, por el contrario, estudian ciertas clases de permutaciones que están presentes en diferentes áreas de la matemática. Por lo cual, bajo los postulados ontológicos del estructuralismo que defiende Shapiro, una teoría no algébrica dada estudia una estructura *ante rem* específica o una clase de estructuras isomórficas y una teoría algébrica, por el contrario, estudia diferentes clases de estructuras no isomórficas.

Dos tipos de definición implícita para el estructuralismo matemático

El método de las definiciones implícitas ocupa un papel destacado en la concepción estructuralista en la filosofía contemporánea de la matemática. La idea central aquí es que un modo efectivo de comprender y adquirir conocimiento de una estructura matemática es a través de una descripción directa de la misma. Ello se logra proporcionando una axiomatización de la teoría matemática que determina –si es exitosa– la clase de todos sus modelos. La tesis de que la matemática consiste en el estudio de las estructuras matemáticas y de las propiedades estructurales de sus objetos es así una motivación fundamental en el llamado método de las definiciones implícitas. Más específicamente, la noción de definición implícita que resulta más habitual en este contexto consiste en sostener que lo que se define por medio de un sistema de axiomas es la clase de los modelos de la teoría matemática.

Esta concepción de las definiciones implícitas resulta además particularmente apropiada para las versiones no-eliminitavista del estructuralismo matemático, especialmente para el estructuralismo *ante rem*. En efecto, para esta posición resulta esencial que uno pueda comunicar y referirse a las estructuras puras y a las posiciones en las estructuras puras, independientemente de sus instanciaciones concretas. Ahora bien, una definición implícita exitosa no define un sistema matemático concreto, sino la clase de los modelos de la teoría axiomática. En consecuencia, en virtud de esta concepción de definición implícita, es posible describir una estructura matemática pura, incluso si ninguna instancia particular de ella es conocida o exhibida. En palabras de Shapiro:

> Structures successfully described by implicit definitions are naturally construed as *ante rem* (if they exist at all, of course). . . . In an implicit definition, asking about Julius Caesar is similar to the aforementioned listener who is wondering about the name of the center fielder's mother. The speaker was describing a structure, not a system of particular people. The mathematics book is not describing a system of sets or Platonic objects or people. It describes a structure or a class of structures. (Shapiro, 1997, pp. 130-132)

Ahora bien, es interesante observar que otras descripciones realizadas por Shapiro (1997) de este método definicional sugiere una noción diferente de definición implícita. De acuerdo con esta segunda noción, lo que se define a través de un sistema de axiomas es el significado de los términos primitivos de una teoría matemática. Esta concepción alternativa es sugerida en pasajes como los siguientes:

> There is an ambiguity in the phrase "implicit definition". . . . In the present context is a simultaneous characterization of a number of items in terms of their relations to each other. In contemporary philosophy, such definitions are sometimes called "functional definitions". (Shapiro 1997, p. 130)

> The other sense of "implicit definition" occurs where one defines several new linguistic items in terms of each other (and terms already in use). Hilbert's axiomatization of geometry is an implicit definition in this sense: "point", "line", and "plane" are defined in terms of their relations to each other. (Shapiro, 1999)

La concepción de las definiciones implícitas según la cual los axiomas de una teoría matemática definen el significado de los términos primitivos tiene sus orígenes en el surgimiento de la moderna concepción de método axiomático, en los trabajos de Hilbert, Dedekind y Peano, entre otros. Un aspecto central de esta concepción, sin embargo, es que no resulta claro cómo funcionan semánticamente este tipo de definiciones. En efecto, a partir de la aparición de dichos trabajos, existe un consenso en la literatura sobre la axiomática formal de que los sistemas axiomáticos –tomados como definiciones implícitas de los términos primitivos– no deben fijar una única referencia para dichos términos. Es decir, en una teoría axiomática formal los conceptos y relaciones primitivas no están ligados a una referencia fija, sino que puede ser libremente interpretados. La especificación de los términos primitivos a través de un sistema formal de axiomas es así dejada de un modo deliberado semánticamente indeterminada. Este hecho ha provocado que numerosos autores rechacen esta noción de definición implícita, en tanto consideran que no puede ser explicada de un modo adecuado en términos de una semántica basada en la teoría de modelos (cf. Hodges, 2001). Sin embargo, el estructuralismo *ante rem* parece vindicar la noción, aunque sin proporcionar una explicación explícita de cómo los axiomas de una teoría matemática pueden especificar el significado de sus términos primitivos y cuál es su relación con la concepción de las definiciones explícitas como definiciones de clases de modelos o tipos isomórficos de estructuras.

Definiciones estructurales: criterios de adecuación

Del mismo modo que la noción de definición explícita está ligada a estrictos criterios de adecuación (i.e., eliminabilidad y no-creatividad), una tarea central en la teoría de las definiciones implícitas consiste en especificar sus criterios de adecuación. Shapiro identifica dos criterios fundamentales: existencia y unicidad.

El primer requerimiento que debe cumplir una definición implícita para definir exitosamente a una estructura es la unicidad: la definición debe caracterizar *a lo sumo* una estructura (salvo isomorfismo). Shapiro entiende a este primer criterio en términos semánticos: los axiomas que sirven de definiciones deben ser categóricos. Esta maniobra impone una primera limitación sobre las teorías matemáticas axiomatizadas en una lógica de primer orden. En efecto, el teorema de Löwenheim-Skolem muestra que toda teoría contable de primer orden con un modelo infinito, tiene un modelo de cualquier cardinalidad infinita. Este resultado dificulta considerablemente el cumplimiento del requisito de unicidad, debido a que no permite descartar los modelos no estándares de las definiciones implícitas más interesantes. Para sortear este problema, Shapiro propone circunscribirse a los lenguajes de segundo orden (u orden superior).

El segundo requerimiento que propone Shapiro es la existencia: las definiciones implícitas deben caracterizar *al menos* una estructura. Para caracterizar este criterio, Shapiro apela al principio de coherencia que formula en el marco del desarrollo de su propuesta ontológica estructuralista. Según este principio, si es una fórmula coherente en un lenguaje de segundo orden, entonces existe una estructura que satisface a Φ (cf. Shapiro, 1997, p. 95). Los problemas en la caracterización de este segundo requisito surgen al tratar de proporcionar una definición rigurosa de coherencia. Una primera opción puede ser apelar a la consistencia deductiva. Es decir, sostener que, si no es posible derivar consecuencias contradictorias de un conjunto de axiomas, entonces esos axiomas describen al menos una estructura. El fundamento riguroso de esta primera opción es el teorema de Gödel: si un conjunto de sentencias de primer orden es deductivamente consistente, entonces tiene un modelo.

Esta maniobra tiene dos problemas fundamentales. En primer lugar, es circular: el teorema de completitud es un resultado en la matemática, específicamente en la teoría de conjuntos. En este sentido, los diversos modelos de axiomatizaciones consistentes se encuentran en la jerarquía conjuntista, que es otra estructura. El segundo problema surge al tratar de articular ambos criterios. El cumplimiento de unicidad y de existencia depende de la lógica subyacente que se emplea en la axiomatización de una teoría matemática. De allí que, ambos requisitos no pueden ser satisfechos simultáneamente. Esquemáticamente, mientras toda teoría consistente de primer orden tiene un modelo (Teorema de Completitud de Gödel), las teorías de primer orden no son categóricas, esto es, tienen modelos no-estándar (Teorema de Löwenheim-Skolem). Por el contrario, mientras las teorías matemáticas de segundo orden o superior son categóricas, existen teorías de segundo orden que son (deductivamente) consistentes, pero no son satisfacibles (Teorema de Incompletitud de Gödel).

Una posible solución a este primer problema es entender a la coherencia como una analogía de satisfacibilidad: una sentencia Φ es satisfacible si existe un modelo de Φ. En este contexto se manifiesta nuevamente la circularidad de la maniobra de Shapiro. En efecto, si la coherencia se explica a partir de la satisfacibilidad, entonces la locución "existe" se entiendo como "es un miembro de la jerarquía conjuntista", que es otra estructura. Shapiro reconoce la circularidad en su propuesta, pero argumenta que tal circularidad no es viciosa:

> There is no getting around this situation. We cannot ground mathematics in any domain or theory that is more secure than mathematics itself. All attempts to do so have failed, and once again, foundationalism is dead (see Shapiro [1991, chapter 2]). The circle that we are stuck with, involving second-order logic and implicit definition, is not vicious and we can live with it. I take "coherence" to be a primitive, intuitive notion, not reduced to something formal, and so I do not venture a rigorous definition. (Shapiro, 1997, p. 135)

La estrategia adoptada por Shapiro para solucionar este último problema consiste en renunciar a dar una caracterización rigurosa del criterio de existencia en términos de la noción conjuntista de satisfacibilidad, y substituirla por la noción primitiva de coherencia. La coherencia no es definida, sino que es explicada a partir de la noción conjuntista de satisfacibilidad. Más específicamente, la satisfacibilidad es a la coherencia lo que la noción de recursividad es a la computabilidad. En resumen, coherencia es la noción intuitiva que sirve como criterio para la existencia de estructura y satisfacibilidad es su análogo matemático riguroso.

Discusión

En esta sección desarrollamos una serie de consideraciones críticas en relación a la descripción del método de las definiciones implícitas realizada por Shapiro y a su variante *ante rem* del estructuralismo matemático. Más precisamente, concentramos nuestro análisis en tres aspectos que consideramos problemáticos en dicha propuesta. En primer lugar, problematizamos la posibilidad de aplicar los mismos criterios para los usos diferentes que Shapiro les atribuye a las definiciones implícitas. En segundo lugar, señalamos la dificultad de compatibilizar el requerimiento de unicidad, entendido como categoricidad, con la distinción entre teorías algebraicas y teorías no algebraicas que propone Shapiro (1997, 2005). Por último, mostramos en qué sentido el éxito del rol epistemológico que Shapiro le asigna las definiciones implícitas depende de un posicionamiento antifundacionalista en filosofía de las matemáticas.

1. Definiciones funcionales y estructurales

Un primer aspecto problemático se manifiesta al comparar las definiciones funcionales y las estructurales. Como hemos visto, para Shapiro, la noción de definición implícita puede entenderse en dos sentidos. Desde el primero de ellos, las definiciones describen estructuras o clases de estructuras. El segundo uso, por otro lado, refiere a la caracterización simultánea de un número de ítems en términos de las relaciones que mantienen entre sí.

La comparación de las definiciones estructurales con las funcionales sugiere que la segunda apunta a definir los primitivos de las teorías matemáticas. Sin embargo, las definiciones implícitas en primer sentido son claramente definiciones de clases de estructuras. En el caso de ambas nociones pueden ser defendidas, una pregunta pertinente es: ¿cómo puede explicarse la relación entre ambos tipos de definiciones? Los criterios de adecuación mencionados para las definiciones implícitas –unicidad y existencia– claramente se aplican a la concepción de definición implícita como clases de modelos o estructuras. En este sentido, otra pregunta relevante es ¿pueden aplicarse sin más los mismos criterios para la noción de definición implícita como definición del significado de términos primitivos?

2. Definiciones estructurales y teorías algebraicas

Dada la distinción entre teorías algebraicas y no algebraicas, Shapiro nos debe una explicación de cómo el método de las definiciones estructurales puede ser aplicado exitosamente para adquirir conocimiento de teorías matemáticas que son esencialmente algebraicas. En la medida en que se presenta a la categoricidad (unicidad) como una condición necesaria para el conocimiento de estructuras *ante rem*, no resulta claro cómo las definiciones estructurales pueden proporcionar un conocimiento de aquella clase de estructuras. En efecto, un rasgo central de las teorías algebraicas (por ejemplo, la teoría de grupos o la de anillo) es que no son descriptas categóricamente, al menos en sus formulaciones habituales. Ello plantea entonces el interrogante de cómo el método de las definiciones implícitas puede resultar una técnica efectiva para adquirir conocimiento de las llamadas teorías matemáticas algebraicas. ¿Significa ello que las teorías esencialmente algebraicas no pueden ser consideradas desde la perspectiva *ante rem*? ¿O se trata más bien de un límite para el método de las definiciones estructurales (y sus criterios de adecuación)?

3. Definiciones estructurales, antifundacionalismo y practica matemática

Shapiro intenta fundar nuestro conocimiento de las estructuras matemáticas en nuestra comprensión de la coherencia y la categoricidad de las descripciones (*i.e.*, definiciones implícitas) de estas estructuras. Estas nociones son explicadas, aunque no definidas, en términos conjuntistas. La coherencia y la categoricidad de las descripciones, y por consiguiente la existencia de las estructuras de las mismas, debe ser decidida o establecida dentro de la teoría de conjuntos. Para Shapiro esto no representa un círculo vicioso, puesto que la plausibilidad del conocimiento matemático de estructuras *ante rem* no puede ser "probada" a partir de premisas "extra-matemáticas":

> In mathematics as practiced, set theory (or something equivalent) is taken to be the ultimate court of appeal for existence questions. . . . the thesis that satisfiability is sufficient for existence underlies mathematical practice. . . . Structuralists accept this presupposition and make use of it like everyone else, and we are in no way better (and no worse) of a position to justify it. This presupposition is not vicious, even if it lacks external justification. (Shapiro, 1997, p. 136)

En este contexto se evidencia que, un presupuesto necesario para asegurar el éxito del rol epistemológico que Shapiro le asigna al método de las definiciones, en el marco del estructuralismo *ante rem*, es su posicionamiento antifundacionalista.

Perspectiva

A modo de conclusión, en esta sección final proponemos dos ejes articuladores para aplicar en ulteriores investigaciones, tomando como base para su formulación los problemas detectados en el presente trabajo. Un primer eje articulador surge al analizar la función de las estructuras *ante rem* en la propuesta epistemológica del estructuralismo de Shapiro. El conocimiento de la coherencia y categoricidad de una descripción se reduce, en última instancia, a la cuestión de la existencia de conjuntos. En este sentido, la ontología del estructuralismo *ante rem* no parece desarrollar un papel substancial en la parte más fundamental de la epistemología de la matemática de Shapiro. Una de las críticas de MacBride (2008) a la propuesta estructuralista apunta a este aspecto: "Shapiro's account offers no distinctively structuralist insight into the epistemology of mathematics" (MacBride, 2008, p. 163). En este marco, el primer eje articulador que proponemos es analizar si las definiciones estructurales, en el marco de la propuesta *ante rem*, logran solucionar el problema del acceso, como Shapiro pretende.

El segundo eje articulador gira en torno a la categoricidad en tanto condición necesaria de adecuación de las definiciones estructurales. Por el teorema de quasi-categoricidad de Zermelo sabemos que, dados dos modelos de ZFC2, o bien son isomórficos o bien uno de ello es isomórficos a un segmento inicial propio del otro. En este sentido, la quasi-categoricidad sería suficiente para determinar referencia, al menos interna a la teoría de conjuntos. El conjunto vacío, ω, el continuo, etc., representan lo mismo en todos los modelos (salvo isomorfismo). En este marco, el segundo eje articulador que proponemos consiste en indagar sobre la caracterización de la condición de unicidad de las definiciones estructurales, teniendo como base los distintos resultados de categoricidad (interna, externa, cuasi-categoricidad, etc.).

Referencias

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie [Foundations of geometry]*. Leipzig: Teubner.

Hodges, W. (2001). Model theory. En E. Zalta, *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Fall 2018 Edition). https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/model-theory/

Macbride, F. (2008). Can «ante rem» structuralism solve the access problem? *The Philosophical Quarterly (1950-), 58*(230), 155-164.

Parsons, C. (1990). The structuralist view of mathematical objects. *Synthese, 84,* p. 303-346.

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of mathematics: Structure and ontology*. Oxford: Oxford University Press.

Shapiro, S. (1999). Implicit definition and abstraction [manuscrito no publicado]. *Unpublished notes.*

Shapiro, S. (2005). Categories, structures, and the Frege–Hilbert controversy: The status of meta-mathematics. *Philosophia Mathematica,*