

# GRÁFICOS DE PEIRCE SIN PÉRDIDA DE INFORMACIÓN

**FRANK THOMAS SAUTTER**

*UFSM / CNPq*

---

## **Resumen**

C. S. Peirce desarrolló dos sistemas diagramáticos de prueba para la Lógica Proposicional Clásica: los Gráficos Entitativos y el Sistema Alfa de los Gráficos Existenciales. Ambos utilizan el mismo conjunto compuesto por seis reglas de inferencia. Modifico estos sistemas de manera que se requieren sólo cuatro de estas reglas de inferencia, es decir, aquellas en las que no hay pérdida de información.

## **Palabras clave**

<diagrama> <información> <reducción al absurdo>

## **Abstract**

C. S. Peirce has developed two diagrammatic systems of proof for Classical Propositional Logic: the Entitative Graphs and the Alpha System of the Existential Graphs. Both use the same set consisting of six rules of inference. I modify these systems so that each of them requires only four of these rules of inference, namely, those in which there is no loss of information.

## **Keywords**

<diagram> <information> <reductio ad absurdum>

## **1. Introducción**

En este artículo voy a presentar una serie de modificaciones de los sistemas diagramáticos de prueba para la Lógica Proposicional Clásica desarrollados por C.S. Peirce. Una exposición de las versiones originales de Peirce es proporcionada por Roberts (1973); una prueba detallada de la corrección de los resultados presentados aquí es proporcionada



Fecha de recepción: 8 de Abr. 2016 - Fecha de aceptación: 10 de Oct. 2016

*Representaciones*, Vol. XII, N° 2 - Nov. 2016, pp 55-68

© SIRCA Publicaciones Académicas - leminhot@gmail.com

da por Sautter y Feitosa (2015).

En la segunda sección presentaré las versiones originales, directas, de Peirce: los Gráficos Entitativos y el Sistema Alfa de los Gráficos Existenciales. En la tercera sección presentaré dos argumentos que justifican las modificaciones propuestas: el argumento del interés en la representación previa de la conclusión y el argumento de la superfluidad de la pérdida de información. Y en la cuarta sección presentaré las versiones modificadas, por refutación, de los dos sistemas de Pierce.

## 2. Gráficos Existenciales y Gráficos Entitativos

El Sistema Alfa de los Gráficos Existenciales usa una hoja de aserción y el conjunto funcionalmente completo de conectores formado por la negación y por la conjunción<sup>1</sup>. La hoja de aserción es representada por un rectángulo; la negación es representada por un corte (cut), una figura cerrada, dentro de la cual la sentencia negada es representada; y la conjunción es representada por la yuxtaposición de sus conjuntivos. Así, por ejemplo, en la parte superior de la Figura 2(a) se ha representado la aserción de  $(\alpha\beta)$ , o sea, la negación de la conjunción de  $\alpha$  y de la negación de  $\beta$ .

Podemos obtener las representaciones de otros conectores mediante la aplicación de la siguiente transformación recursiva *ex* para el Sistema Alfa de los Gráficos Existenciales:

- $\varphi^{ex}$  es  $\varphi$  si  $\varphi$  es un átomo;
- $\varphi^{ex}$  es  $\neg\Psi^{ex}$  si  $\varphi$  es  $\neg\Psi$ ;
- $\varphi^{ex}$  es  $(\Psi ex \wedge \Theta ex)$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \wedge \Theta)$ ;
- $\varphi^{ex}$  es  $\neg(\neg\Psi ex \wedge \neg\Theta ex)$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \wedge \Theta)$ ;
- $\varphi^{ex}$  es  $\neg(\Psi ex \wedge \neg\Theta ex)$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \supset \Theta)$ ;
- $\varphi^{ex}$  es  $\neg(\Psi ex \wedge \neg\Theta ex) \wedge \neg(\Theta ex \wedge \neg\Psi ex)$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \equiv \Theta)$ .

El Sistema Alfa de los Gráficos Existenciales (y también los Gráficos Entitativos) utilizan las siguientes reglas de inferencia:

1. La introducción de la doble negación: se permite circunscribir cualquier gráfico con un par de cortes concéntricos, es decir, cortes

entre los cuales no hay nada. El paso de la Figura 3(a) a la Figura 3(b) ejemplifica esta regla.

2. La eliminación de la doble negación: se permite borrar cualquier par de cortes concéntricos. El paso de la Figura 2(c) a la Figura 2(d) ejemplifica esta regla.

Para explicar las próximas reglas introducimos la noción de nivel: la hoja de aserción en los Gráficos Existenciales (y la hoja de rechazo en los Gráficos Entitativos) tiene nivel par: si en un nivel par introducimos un corte, entonces el interior de ese corte tiene un nivel impar y es interno a ese corte (el concepto de interior es transmitivo); si en un nivel impar introducimos un corte, entonces el interior de ese corte tiene un nivel par y es interno a ese corte. En la Figura 2(a), por ejemplo,  $\delta$  es a un nivel par y  $\alpha$  es a un nivel impar.

3. Iteración: se permite repetir un gráfico en el mismo nivel donde está o en un nivel interno a ese. El paso de la Figura 2(a) a la Figura 2(b) ejemplifica esta regla.

4. Deiteración: se permite borrar un gráfico que fue producido por iteración o que podría haber sido producido por iteración. El paso de la Figura 2(b) a la Figura 2(c) ejemplifica esta regla.

5. Borrar en par: se permite borrar cualquier gráfico en un nivel par. El paso de la Figura 2(d) a la Figura 2(e) ejemplifica esta regla.

6. Insertar en impar: se permite insertar cualquier gráfico en un nivel impar. El paso de la Figura 3(b) a la Figura 3(c) ejemplifica esta regla.

Sea un argumento cuyas premisas son  $P_1, \dots, P_N$ , y cuya conclusión sea  $C$ . Para determinar su validez o invalidez por el sistema directo para los Gráficos Existenciales, representa las transformadas  $P_1^{ex}, \dots, P_N^{ex}$  de las premisas en el nivel de la hoja de aserción. El argumento es válido si y sólo si, por las seis reglas de inferencia, se puede obtener la transformada  $C^{ex}$  de la conclusión en el nivel de la hoja de aserción (la hoja de aserción puede contener, en este caso, otros gráficos  $\phi$ ). Las Figuras 1(a) y 1(b) describen este procedimiento

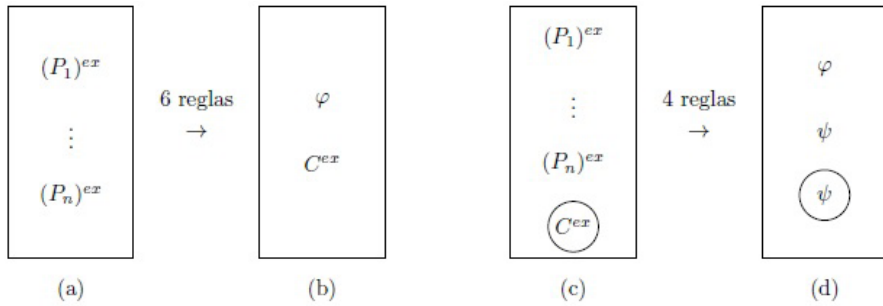


Figura 1: Prueba de validez para los Gráficos Existentes.

La Figura 2 muestra los pasos de la prueba de validez del silogismo hipotético por el sistema directo para los Gráficos Existentes. En la Figura 2(a) están representadas las premisas  $(\alpha\beta)$  y  $(\beta\delta)$  en la hoja de aserción. En el paso de 2(a) a 2(b) aplicamos la iteración de  $(\beta\delta)$ . En el paso de 2(b) a 2(c) aplicamos la deiteración de  $\beta$ . En el paso de 2(c) a 2(d) aplicamos la eliminación de la doble negación. Y en el paso de 2(d) a 2(e) aplicamos el borrar en par de  $\beta$ , y obtuvimos  $(\alpha\delta)$ , Q.E.D.

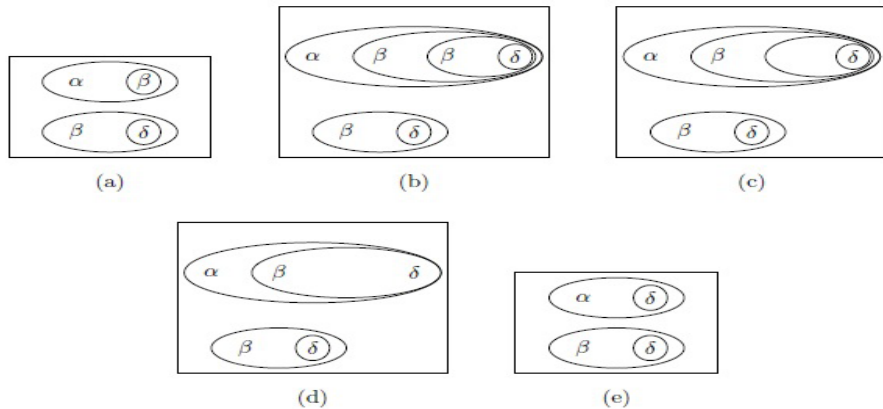
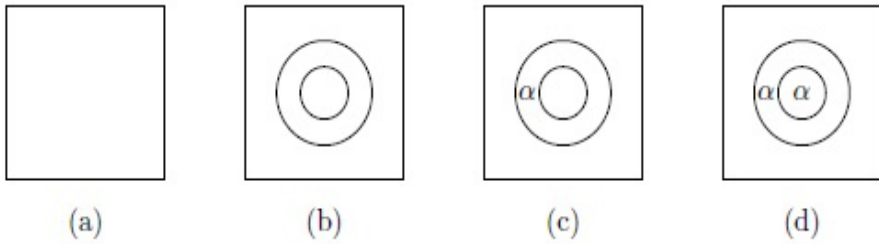


Figura 2: Silogismo hipotético por el sistema directo para los Gráficos Existentes.

La Figura 3 muestra los pasos de la prueba de la tautologicitad del principio de identidad por el sistema directo para los Gráficos Existentes. En la Figura 3(a) tenemos sólo la hoja de aserción. En el paso de 3(a) a 3(b) aplicamos la introducción de la doble negación. En el paso de 3(b) a 3(c) aplicamos la inserción de impar de  $\alpha$ . Y en el paso de 3(c) a

3(d) aplicamos la interacción de  $\alpha$ , y obtuvimos  $(\alpha\alpha)$ , Q.E.D.



Figra 3: Principio de identidad por el sistema directo para los Gráficos Existenciales.

Los Gráficos Entitativos son duales del Sistema Alfa de los Gráficos Existenciales; una exposición filosóficamente relevante del fenómeno de la dualidad se pueden encontrar en el trabajo de Sanz (2008). Los Gráficos Entitativos usan una hoja de rechazo y el conjunto funcionalmente complejo de conectores formando por la negación y por la disyunción inclusiva. La hoja de rechazo es representada por un rectángulo; la negación es representada por un corte, dentro del cual la sentencia negada es representada; y la disyunción inclusiva es representada por la yuxtaposición de sus disyuntivos.

Podemos obtener las representaciones de otros conectores mediante la aplicación de la siguiente transformación recursiva *en* para los Gráficos Entitativos:

- $\varphi^{en}$  es  $\varphi$  si  $\varphi$  es un átomo;
- $\varphi^{en}$  es  $\neg\Psi^{en}$  si  $\varphi$  es  $\neg\Psi$ ;
- $\varphi^{en}$  es  $(\Psi^{en} \vee \Theta^{en})$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \vee \Theta)$ ;
- $\varphi^{en}$  es  $\neg(\neg\Psi^{en} \vee \neg\Theta^{en})$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \wedge \Theta)$ ;
- $\varphi^{en}$  es  $(\neg\Psi^{en} \vee \Theta^{en})$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \supset \Theta)$ ;
- $\varphi^{en}$  es  $\neg(\neg(\neg\Psi^{en} \vee \Theta^{en}) \vee \neg(\neg\Theta^{en} \vee \Psi^{en}))$  si  $\varphi$  es  $(\Psi \equiv \Theta)$ .

Sea un argumento cuyas premisas son  $P_1, \dots, P_n$ , y cuya conclusión sea  $C$ . Para determinar su validez o invalidez por el sistema directo para los Gráficos Entitativos, representa las transformadas  $(\neg P_1)^{en}, \dots, (\neg P_n)^{en}$  de las premisas en el nivel más bajo de la hoja de rechazo. El argumento es válido si y solo si, por las seis reglas de inferencia, se puede

obtener la transformada  $(-C)^{en}$  de la conclusión en el nivel más bajo de la hoja de rechazo (la hoja de rechazo puede contener, en este caso, otros gráficos  $\varphi$ ). Las Figuras 4(a) y 4(b) describen este procedimiento.

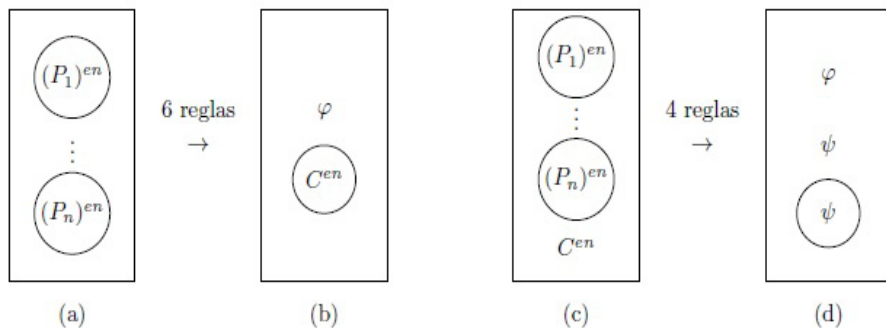


Figura 4: Prueba de validez para los Gráficos Entitativos.

La Figura 5 muestra los pasos de la prueba de validez del silogismo hipotético por el sistema directo para los Gráficos Entitativos. En la Figura 5(a) están representadas las negaciones de las premisas  $(\alpha\beta)$  y  $(\beta\delta)$  en la hoja de rechazo. En el paso de 5(a) a 5(b) aplicamos la iteración de la negación de  $(\alpha\beta)$ . En el paso de (b) a 5(c) aplicamos la deiteración de  $\delta$ . En el paso de 5(c) a (d) aplicamos la eliminación de la doble negación. Y en el paso de 5(d) a 5(e) aplicamos el borrar en par de  $\beta$ , y obtuvimos la negación de  $(\alpha\beta)$ , Q.E.D.

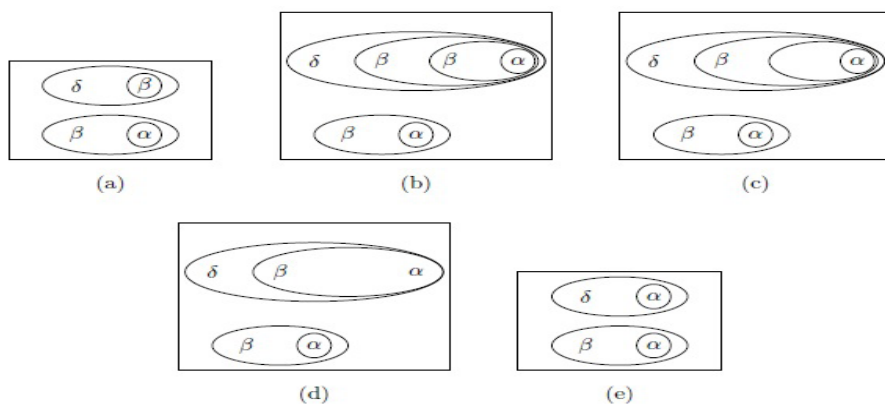


Figura 5: Silogismo hipotético por el sistema directo para los Gráficos Entitativos.

La Figura 3 también muestra los pasos de la prueba de tautologitud del principio de identidad por el sistema directo para los Gráficos Entitativos.

### 3. Modificaciones y dos argumentos en su favor

La representación gráfica de la conclusión (sentencia que se pondrá a prueba para tautologitud, respectivamente) es el punto de llegada del procedimiento de prueba de validez (tautologitud, respectivamente) del sistema directo, ya sea para los Gráficos Existenciales o para los Gráficos Entitativos. Sin embargo, para la aplicación óptima de las reglas de inferencia, debe tenerse en cuenta, desde el principio del procedimiento, esta representación gráfica de la conclusión (sentencia que se pondrá a prueba para tautologitud, respectivamente). El sistema indirecto, que será presentado en la sección siguiente, requiere la representación gráfica de la negación de la conclusión (la negación de la sentencia que se pondrá a prueba para tautologitud, respectivamente) al comienzo del procedimiento. Esto es el argumento del interés en la representación previa de la conclusión (sentencia que se pondrá a prueba para tautologitud, respectivamente) a favor del sistema indirecto.

El argumento de la superfluidad de la pérdida de información depende de la previa caracterización informativa de nociones lógicas centrales. Vamos a empezar con la noción de validez deductiva.

*Un argumento es deductivamente válido si y sólo si la información de la conclusión está disponible en las premisas<sup>2</sup>.*

Por otro lado, considere la información de verdades y falsedades lógicas. A menudo se sostiene, con razón, que las sentencias lógicamente necesarias y las lógicamente imposibles no dicen nada acerca del mundo. Sin embargo, las necesidades lógicas y las imposibilidades lógicas lo hacen de manera muy diferente. Las necesidades lógicas no dicen nada acerca del mundo debido a que no codifican ninguna información; las imposibilidades lógicas no dicen nada acerca del mundo debido a que codifican toda información posible. Esta asimetría extrema se prueba mediante el uso de la noción informativa de validez

deductiva dada anteriormente y los siguientes hechos lógicos: a) si una necesidad lógica es una premisa del argumento, ella es irrelevante para la prueba de su validez o invalidez deductiva; b) si una necesidad lógica es la conclusión del argumento, éste es deductivamente válido; c) si una imposibilidad lógica es premisa del argumento, éste es deductivamente válido.

La caracterización informativa de imposibilidades lógicas como las que codifican toda información posible es fundamental para la optimización de la versión por refutación de los Sistema Alfa de los Grafos Existenciales de Peirce (el argumento se aplica, *mutatis mutandis*, a los Gráficos Entitativos). En los sistemas de refutación, se requiere representar inicialmente las premisas y la negación de la conclusión y, mediante la aplicación de reglas de inferencia, se obtiene una imposibilidad lógica, si el argumento es válido. Ahora, esto implica que las reglas de inferencia en las que no hay pérdida de información en el paso de las premisas a la conclusión deberían ser suficientes para probar todos los argumentos válidos, y sólo éstos.

Las reglas de inferencia en las que no hay pérdida de información son aquellos reversibles, es decir, las reglas de inferencia que, cuando se las aplican, su acción se puede deshacer, se puede inferir legítimamente su premisa de su conclusión. Estas reglas de inferencia vienen en pares: lo que una hace, la otra puede deshacer.

Entre las seis reglas de inferencia de Peirce, ¿cuáles son aquellas en las que no hay pérdida de información? Obviamente las reglas de introducción y de eliminación de cortes concéntricos forman una pareja, lo que una hace, la otra puede deshacer. Las reglas de iteración y de deiteración también forman una pareja: no hay pérdida de información. Pero las reglas de inserción en impar y de borrar en par no forman una pareja, lo que una hace, la otra no lo puede deshacer, o sea, hay pérdida de información.

#### **4. Versiones indirectas de los Gráficos Existenciales y de los Gráficos Entitativos**

Sea un argumento cuyas premisas son  $P_1, \dots, P_n$ , y cuya conclusión sea  $C$ . Para determinar su validez o invalidez por el sistema indirecto para los Gráficos Existenciales, representéense las transformadas  $P_1^{ex}$ ,



...,  $Pn^{ex}$  de las premisas y la transformada  $(-C)^{ex}$  de la negación de la conclusión en el nivel más bajo de la hoja de aserción. El argumento es válido si y sólo si, por medio de las cuatro reglas de inferencia, se puede obtener una contradicción  $\Psi$  y  $\neg\Psi$  en el nivel de la hoja de aserción (la hoja de aserción puede contener, en este caso, otros gráficos  $\varphi$ ). Las Figuras 1(c) y 1(d) describen este procedimiento.

La Figura 6 muestra los pasos de la prueba de validez del silogismo hipotético por el sistema indirecto para los Gráficos Existenciales. En la Figura 6(a) están representadas las premisas  $(\alpha\beta)$  y  $(\beta\delta)$ , y la negación de la conclusión  $(\alpha\delta)$ . En el paso de 6(a) a 6(b) aplicamos la eliminación de  $\alpha$ . En el paso de 6(c) a 6(d) aplicamos la eliminación de la doble negación. Y en el paso de 6(d) a 6(e) aplicamos la deiteración de  $\neg\delta$ . Obtuvimos así una contradicción ( $\beta$  y  $\neg\beta$ ). Q.E.D.

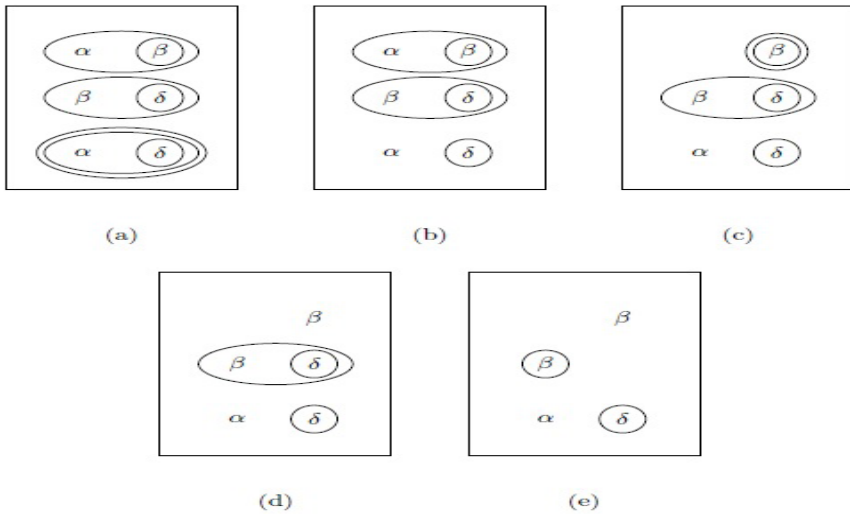


Figura 6: Silogismo hipotético por el sistema indirecto.

La Figura 7 muestra los pasos de la prueba de tautologicidad del principio de identidad por el sistema indirecto para los Gráficos Existenciales. En la Figura 7(a) está representada la negación de  $(\alpha\alpha)$ . Y en el paso de 7(a) a 7(b) aplicamos la eliminación de la doble negación. Obtuvimos así una contradicción ( $\alpha$  y  $\neg\alpha$ ). Q.E.D.

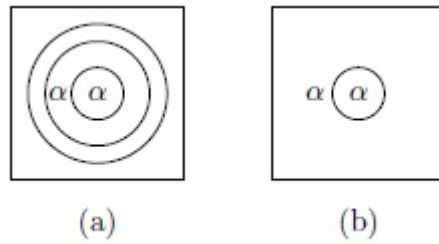
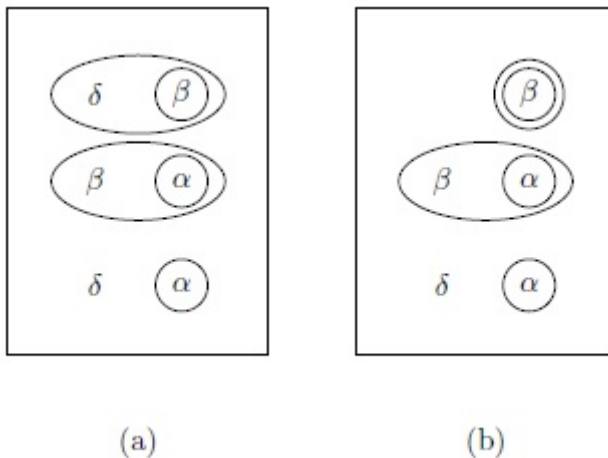


Figura 7: Principio de identidad por el sistema indirecto.

Sea un argumento cuyas premisas son  $P_1, \dots, P_n$ , e cuya conclusión sea  $C$ . Para determinar su validez o invalidez por el sistema indirecto para los Gráficos Entitativos, representéense las transformadas  $(\neg P_1)^{en}$ ,  $\dots$ ,  $(\neg P_n)^{en}$  de las premisas y la transformada  $C^{en}$  de la conclusión en el nivel más bajo de la hoja de rechazo. El argumento es válido si y solo si, por medio de las cuatro reglas de inferencia, se puede obtener una tautología  $\Psi$  o  $\neg\Psi$  en el nivel más bajo de la hoja de rechazo (la hoja de rechazo puede contener, en este caso, otros gráficos  $\varphi$ ). Las Figuras 4(c) y 4(d) describen este procedimiento.

La Figura 8 muestra los pasos de la prueba de validez del silogismo hipotético por el sistema indirecto para los Gráficos Entitativos. En la Figura 8(a) están representadas las negaciones de las premisas  $(\alpha\beta)$  y  $(\beta\delta)$ , y la conclusión  $(\alpha\delta)$ . En el paso de 8(a) a 8(b) aplicamos la deiteración de  $\boxplus$ . En el paso de 8(b) a 8(c) aplicamos la eliminación de la doble negación. Y en el paso de 8(c) a 8(d) aplicamos la deiteración de  $\neg\alpha$ . Obtuvimos una tautología  $(\beta$  o  $\neg\beta)$ . Q.E.D.



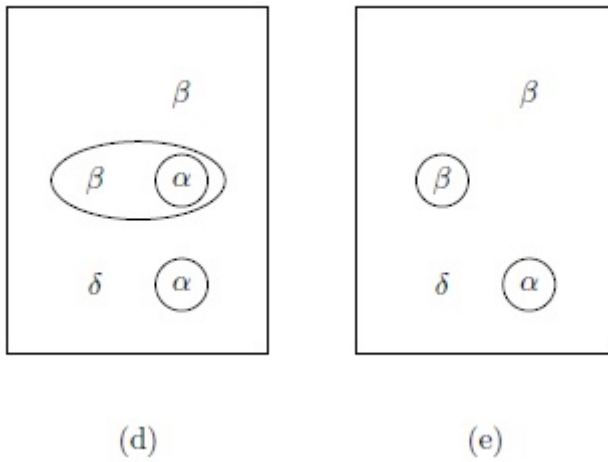


Figura 8: Silogismo hipotético por el sistema indirecto – Gráficos Entitativos.

Para la prueba de tautologicidad del principio de identidad por el sistema indirecto para los Gráficos Entitativos solamente es necesario representar  $(\alpha\alpha)$ . Obtuvimos  $\alpha$  o  $\neg\alpha$ , que es una tautología. Q.E.D.

Los sistemas indirectos de prueba son correctos, ya que el conjunto de reglas utilizado por ellos son un subconjunto del conjunto de reglas utilizado por los sistemas directos de prueba. Sautter y Feitosa (2015) han demostrado la completitud fuerte de los sistemas indirectos de prueba comprobando que todo lo que es deducible en el sistema fuertemente completo de Rosser (1953) también lo es en los sistemas indirectos de prueba que se presentan aquí.

### 5.Consideraciones finales

Los sistemas de prueba de Peirce, tanto en sus versiones originales y en versiones modificadas presentadas aquí, requieren una considerable preparación previa de las sentencias para expresarlas en términos de los conectivos primitivos. Puede ser ventajoso expandir la cantidad de conectivos primitivos, aunque esto requiere un conjunto más amplio de reglas de inferencia.

Por otra parte, en los sistemas de prueba de Peirce, a diferencia

de otros sistemas diagramáticos de prueba (por ejemplo, los Sistemas de Venn y de Lewis Carroll), no es suficiente representar gráficamente las premisas para obtener la representación gráfica de la conclusión si el argumento es válido; es necesario modificarlas por las reglas de inferencia hasta obtener la representación de la conclusión. Tal vez lo mejor sea situar los sistemas de prueba de Peirce en una subcategoría de los sistemas heterogéneos de prueba, distinta de la subcategoría a la que pertenecen la gran mayoría de los sistemas heterogéneos de prueba.

## Referencias

Bellucci, Francesco; Pietarinen, Ahti-Veikko (2016) "Existential graphs as an instrument of logical analysis. Part I. Alpha", *Review of Symbolic Logic* vol. 9, pp 209-237.

Roberts, Don (1973) *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague, Paris: Mouton.

Sanz, Wagner de Campos (2008) "Falsity preservation", *CLE e-prints* vol. 8, 14 p.

Sautter, Frank Thomas (2013) "Un tema de Hilbert y Ackermann: Formas normales para la prueba de validez". In: Esquisabel, Oscar Miguel; Sautter, Frank Thomas (Orgs.). *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico*. Historia y teoría, Buenos Aires: Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, pp. 71-79.

Sautter, Frank Thomas; Feitosa, Hércules de Araújo (2015) "Grafos de Peirce ad absurdum", *Cognitio* vol. 16, pp 153-168.

<sup>1</sup>Agradezco a un evaluador anónimo por llamar mi atención sobre el trabajo de Bellucci y Pietarinen (2016), en el cual se aclara que la interpretación original de Peirce establece la implicación material y el absurdo como el conjunto funcionalmente completo que se utiliza.

<sup>2</sup>Sautter (2013) sugiere que, para los propósitos de la lógica, una

pieza de información puede ser identificada con un conjuntivo de la forma normal conjuntiva de una sentencia.

Frank Th. Sautter  
*ftsautter@gmail.com*

Obtuvo su título de Doctor en Filosofía en la Universidade Estadual de Campinas (Brasil), 2000. Actualmente ocupa el cargo de Profesor Asociado en el Departamento de Filosofía de la Universidade Federal de Santa María y es investigador del Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) de Brasil.