

DEMOSTRACIONES HETEROGÉNEAS: REVISANDO LAS PREGUNTAS¹

JOSÉ SEOANE

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación Universidad de la República Uruguay

Resumen

La demostración heterogénea ha sido objeto de intensa atención filosófica y lógica. Un trabajo pionero al respecto lo constituye el clásico artículo de Barwise y Etchemendy: *Visual Inference and Valid Reasoning*. Es difícil sostener que la perspectiva allí delineada haya marcado en forma absoluta el horizonte reflexivo sobre esta temática, pero es indiscutible su poderosa influencia en el desarrollo de la investigación sobre la heterogeneidad inferencial. El propósito de este trabajo es visitar dicha obra, no tanto para aislar las tesis principales, cuanto para hacer emerger las cuestiones a las que aquellas buscan hacer justicia. El principal resultado consiste en ciertas reformulaciones de algunas de las interrogantes iniciales.

Palabras clave

<demostración heterogénea> <filosofía de la práctica matemática>
<filosofía de la imagen>

Abstract

Heterogeneous proof has been the object of intense philosophical and logic discussions. A seminal paper in this area is the classical work of Barwise and Etchemendy: *Visual Inference and Valid Reasoning*. Although the influence of this work has been very important, particularly regarding heterogeneous inference, it is rather difficult to hold that such perspective was the unique dominant point of view. The aim of this paper is to revisit the above-mentioned work, not so much in order to reconstruct its main theses, but mainly to unveil a series of issues that underlie those theses. The major result consists in suggesting



Fecha de recepción: 8 de Abr. 2016 - Fecha de aceptación: 10 de Oct. 2016

Representaciones, Vol. XII, N° 2 - Nov. 2016, pp 87-108

© SIRCA Publicaciones Académicas - leminhot@gmail.com

a set of reformulations of such initial questions.

Key words

<heterogeneous proof> <philosophy of mathematical practice> <philosophy of image>

1.

Es frecuente predicar la formalidad de la demostración matemática, aunque esto puede hacerse por razones variadas. Por ejemplo, suele entenderse que cierta trama inferencial es *formal* en el sentido de que su legitimidad o justificación no depende del tópico particular, es decir, de los objetos matemáticos involucrados². Sin embargo, en estas páginas se entenderá que una demostración es *formal* si y solamente si se desarrolla en el contexto de un sistema formal, i. e., un sistema representacional e inferencial caracterizable sintácticamente. Demostraciones formales suelen encontrarse casi exclusivamente en los textos introductorios de lógica. Una demostración *informal* es aquella que se desarrolla fuera de un sistema formal. En cualquier manual de cálculo o de álgebra, por ejemplo, pueden consultarse múltiples ejemplos. En realidad, prácticamente todas las demostraciones que conocemos son de esta última clase.

Una demostración matemática puede ser *lingüística*, es decir, expresarse exclusivamente a través de un lenguaje, ya sea este histórico o manufacturado para servir a algún objetivo específico. O puede ser heterogénea, es decir, expresarse conjugando componentes lingüísticos y componentes visuales. Tal *heterogeneidad* puede ser expresiva o lógica. Para considerarse “expresiva” es condición necesaria y suficiente que se produzca la concurrencia en la trama demostrativa de componentes visuales y lingüísticos. Para considerarse “lógica” es condición necesaria y suficiente que sea expresiva y el componente visual sea esencial en la justificación o respaldo de la conclusión o teorema. El componente visual cumple así un papel decisivo. No se trata de que ilustre o facilite didácticamente la comprensión de la demostración; debe contribuir sustantivamente a su economía. Un test simple es el siguiente: si puede eliminarse de la demostración el componente visual y ésta subsiste como tal, entonces la demostración original no era

heterogénea en su acepción lógica. En general, una demostración heterogénea exhibe componentes visuales explícitos, pero, con frecuencia, recurre también a, por así decirlo, componentes visuales “implícitos”, es decir, que no aparecen en forma expresa, material, explícita en la trama demostrativa, pero le corresponda un papel relevante en la representación mental del proceso demostrativo³. En este texto se entenderá heterogeneidad (en su acepción lógica) y se admitirá en su expresión componentes visuales explícitos e implícitos⁴.

Si se combinan las dos distinciones principales arriba discutidas se obtiene el siguiente cuadro de doble entrada:

		Demostraciones	
		informales	formales
lingüísticas			
heterogéneas	X		

Este cuadro es interesante al menos por dos razones. La primera es que no se trata de un mero juego combinatorio: ninguno de los casilleros es vacío. Cada una de las categorías por ellos representadas, como es bien conocido, posee múltiples instancias en la práctica lógica y matemática. Esto revela que el cuadro describe (aunque en forma estilizada) una situación preexistente. La segunda razón reside en que permite identificar con precisión un tipo de argumentación que ha sido objeto de intensa atención filosófica y lógica, a saber, la demostración heterogénea informal.

Un trabajo pionero al respecto lo constituye el clásico artículo de Barwise y Etchemendy: *Visual Inference and Valid Reasoning*⁵. Es difícil sostener que la perspectiva allí delineada haya marcado en forma absoluta el horizonte reflexivo sobre esta temática, pero es igualmente indiscutible que ha influido poderosamente en el desarrollo de la in-

vestigación sobre la heterogeneidad inferencial o lógica. El propósito de este trabajo es revisitar, no tanto las tesis iniciales defendidas por ambos autores en dicho trabajo, cuanto las cuestiones a las que aquellas buscan hacer justicia. La conclusión fundamental apunta a la conveniencia de reformular algunas de dichas cuestiones.

El plan de este escrito es el siguiente. En la sección 2 se introduce, en forma esquemática, el punto de vista estándar y se identifican tres interrogantes centrales que este intenta resolver; en las secciones 3 y 4 se exploran críticamente aquellas y se sugieren sendas reformulaciones. Finalmente, la sección 5 expone dos conclusiones principales de los desarrollos anteriores: la conveniencia de revisar el carácter denotacional de la imagen y el interés de atender privilegiadamente a la sociedad visual-lingüística en la dinámica de la demostración heterogénea.

2.

El objetivo de Barwise y Etchemendy en el escrito citado es neto: vindicar la representación visual como componente legítimo de la trama inferencial. Ellos despliegan a tal fin una suerte de estrategia doble.

Por una parte, una política *defensiva*, consistente en denunciar como infundados los ataques a la legitimidad de los elementos visuales en tanto piezas sustantivas de la inferencia. El carácter racionalmente injustificado de tal rechazo los lleva a identificarlo como dogmático; específicamente lo denominan “dogma logocéntrico”. Este consiste en aceptar como único soporte legítimo de información, en el contexto inferencial, al soporte lingüístico, y negar así (en tal ámbito) la “ciudadanía plena” al soporte visual.

Por otra parte, desarrollan una política *ofensiva*, consistente en analizar ejemplos de inferencia heterogénea. En particular, se llamará la atención aquí hacia dos de ellos. La razón es que estos juegan un papel especial: cada uno funciona, por así decirlo, como representante de una cierta clase argumental. Quizá podría aventurarse que ambas clases conformarían una auténtica partición del conjunto de inferencias heterogéneas informales.

El primer argumento es el siguiente:

Suppose you are a tourist in San Francisco's Chinatown, and a motorist stops and asks how to get to China Basin. You take out

your map, find both's Chinatown and China Basin, and tell him what route he could take. (Barwise y Etchemendy, 1996: 5)

La conclusión de la inferencia en cuestión es la ruta a tomar; entre la información de partida, es decir, las premisas de la inferencia, se encuentra aquella codificada en el mapa, i. e. visualmente, así como información aportada lingüísticamente (el destino pretendido)⁷. Los autores usan este argumento a los efectos de mostrar la superioridad de la codificación visual versus la codificación lingüística respecto de una situación específica. No se niega la posibilidad (teórica) de reproducir lingüísticamente la información contenida en el mapa; el punto es la superioridad del mapa desde el ángulo de la eficiencia inferencial. No se trata pues de la *indispensabilidad*, sino de la *preferencia* por una cierta forma de codificar la información, respecto de otra, en relación con una finalidad particular. ¿Cuál sería la clase argumental referida? La de todos aquellos argumentos en los cuales la inclusión del recurso visual posee estas virtudes de facilitación del raciocinio. Como se advierte, tal punto de vista sugiere así, dado un cierto contexto, una suerte de “medición” de eficiencia inferencial en función de los diversos soportes de información.

El segundo ejemplo es el siguiente:

Suppose you are at a large party and want to meet a visiting mathematician (Anna, to give her a name) whom you know to be there. You are told that Anna is in the next room talking to a man with a beard. When you enter the room you see that, unfortunately, there are two bearded men. Fortunately, though, they are both talking to the same woman. You conclude that she must be Anna. (Barwise y Etchemendy, 1996: 5)

En la interpretación de Barwise y Etchemendy este ejemplo difiere esencialmente del anterior. La conclusión reside en la identificación de Anna. La percepción visual de la mujer que conversa con los hombres con barba juega un rol esencial en la trama inferencial. Pero hay más: la conclusión consiste (según estos autores) en vincular nombre y denotación del nombre. Y esto, en su perspectiva, significa obtener algo que le está vedado a cualquiera de los dos sistemas representacionales

por separado (lingüístico y visual). En particular y por esta razón, no puede haber un sistema lingüístico formal capaz de captar esa estructura inferencial. Así lo expresan:

For our purposes, the crucial feature of this example is that the conclusion associates a name with a person in a way that transcends each domain individually, both the linguistic and the visual. Because of this, the reasoning cannot be accurately modeled by deductions in a standard formal language. (Barwise y Etchemendy, 1996: 6)

No se trata pues de una preferencia por el soporte visual respecto del soporte lingüístico (como en el caso anterior), sino de la *indispensabilidad* del primero. ¿Cuál sería la clase argumental en cuestión? La compuesta por aquellos argumentos en los cuales la apelación a la codificación visual de la información es indispensable.

Independientemente de la solidez de las tesis presentadas, el aspecto sobre el cual se aspira a llamar la atención aquí es la *cuestión* o *inquietud intelectual* que subyace a estas. No parece, en este caso particular, excesivamente difícil aislarla. El problema que intenta desentrañar el análisis de ambos argumentos es el del aporte de la codificación visual a la economía de la inferencia. O, dicho de otro modo, qué trabajo particular hace, en cada caso, el componente visual. Formulada tal inquietud como una interrogante, puede expresarse así:

1) ¿Cuál es la contribución específica del componente visual a la inferencia heterogénea informal?

Es este ciertamente un desafío mayor. Pero nótese que, desde el punto de vista metodológico, Barwise y Etchemendy asumen un horizonte relativamente preciso:

In this way we can hope to do something analogous to what Frege and his followers did for reasoning based on linguistic information. Frege made great strides in studying linguistically based inference by carving out a simple, formal language and investigating the deductive relationships among its sentences. Our hope is

that the tools we have begun to develop will allow something similar to be done with information presented in more than one mode. (Barwise y Etchemendy, 1996: 22)

Simplificando la lectura podría decirse que la “similaridad” pretendida se vincula, directamente, con la formalización de la inferencia heterogénea. Si se quiere graficar la situación (explotando el cuadro anterior), podría exponerse así el esfuerzo de Frege y sus continuadores como el pasaje de X1 a X2: ⁸:

Demostraciones		informales	formales
lingüísticas		X ₁	X ₂
heterogéneas			

Es decir, construir un lenguaje formal capaz de “traducir” adecuadamente cada demostración informal. Esta “traducción” puede asumir objetivos diversos, dependiendo de aquello que se pretende preservar y aquello que se pretende perfeccionar por medio de tal operación. En términos generales, la tarea que enfrentarían Barwise y Etchemendy sería el pasaje de Y1 a Y2:

Demostraciones		informales	formales
lingüísticas			
heterogéneas		Y ₁	Y ₂

Es decir, el objetivo es construir un sistema formal capaz de permi-

tir la “traducción” de raciocinios que combinen ambos componentes. En cierta forma, es razonable pensar que parte de ese trabajo ya está hecho (a saber, la formalización de la dimensión lingüística); el desafío que resta consistiría en “disciplinar” los componentes visuales. ¿Cuál es la cuestión subyacente a este programa? Puede formularse la pregunta directamente:

2) ¿Cómo formalizar la inferencia heterogénea informal?

Quizá valga la pena destacar que tal interrogante ha significado un estímulo excepcionalmente valioso para el trabajo lógico. Entre otros, los esfuerzos de Barwise y Etchemendy (Barwise y Etchemendy, 1991), Shimojima (Shimojima, 1996), Shin (Shin, 1994) y Luengo (Luengo, 1993) pueden contarse como iniciativas orientadas a responder esta cuestión en casos específicos.

Las observaciones anteriores sugieren dos comentarios relevantes. El programa inducido por esta importante orientación hace que el análisis de las inferencias informales heterogéneas resulte, dicho metafóricamente, una especie de “estación intermedia” en el camino hacia el destino fundamental: la construcción del sistema formal correspondiente. Hammer, por ejemplo, lo expresa con ejemplar elocuencia:

The existence of formal diagrammatic proofs shows that is possible to spell out a proof in more and more detail without ever abandoning the proof's visual aspect. Even at the ultimate level of the formalization of the syntax and semantics, diagrams can appear alongside sentences. Giving that diagrams can be formalized just like linguistic proofs, an informal proof involving diagrams might as well be taken as being shorthand for some formal proof in a diagrammatic or heterogeneous system. (Hammer, 1995: 27)

La distribución del trabajo lógico arriba esbozada en relación con tal construcción tiende a concentrar el esfuerzo en captar (fundamentalmente) el comportamiento inferencial del componente visual.

Este énfasis en la intelección del componente visual (más bien en forma aislada o autónomamente considerado) auspicia un esfuerzo

por aprehender su especificidad en oposición al lenguaje. En el artículo pionero de Barwise y Etchemendy se discute esta cuestión en una sección que posee un título elocuente: "Comparing visual and linguistic representations". Una idea que ha jugado un papel muy importante en la exploración de tal contraste es introducida en dicha sección. En palabras de estos autores

[...] a good diagram is isomorphic, or at least homomorphic, to the situation it represents, at least along certain crucial dimensions [...] In our Venn diagram proof, there is a homomorphic relationship between regions and sets. By contrast, the relationship between the linguistic structure of a sentence and that of its content is far more complex. It is certainly nothing like a homomorphism in any obvious way. (Barwise y Etchemendy, 1996: 24)

La idea central aparece como una reformulación de ideas tradicionales acerca de cómo denota el lenguaje y cómo denotan las imágenes. El primero lo hace vinculando arbitrariamente signo y referente; la segunda se apoya en una relación de semejanza. O, en los términos de esta propuesta, en una relación isomórfica o al menos homomórfica entre denotador y denotado. Si el contraste entre estas modalidades representacionales se sitúa en ese plano, entonces la pregunta subyacente podría expresarse así:

3) ¿Cuál es la especificidad denotacional de la imagen (que permite diferenciarla del lenguaje) en el contexto de la inferencia informal heterogénea?

Esta especificidad se refiere a la relación denotacional, no a la particularidad o calidad de la denotación. Lo relevante es cómo denotan. Lo hacen de forma diferente, aunque eventualmente lo denotado sea idéntico. Hammer (en su monografía clásica) intentó evaluar esta perspectiva con un resultado más bien moderado (Hammer, 1995; especialmente página 12); Shimojima elaboró un panorama de los distintos esfuerzos dirigidos a atrapar la distinción lingüístico y visual (lingüístico y gráfico, en su terminología) aportando una interesante alternativa (Shimojima, 2001).

En síntesis, las preguntas arriba presentadas han evidenciado una enorme fecundidad en su capacidad de orientar la investigación filosófica y lógica; los diversos trabajos referidos son apenas una muestra de ese valioso impacto en la producción de conocimiento en el área. Por lo tanto, las reflexiones que siguen no apuntan a cuestionar aquellas preguntas, sino más bien a reformularlas, a los efectos de acoger nuevos aspectos complementarios o a enfatizar dimensiones relativamente novedosas.

3.

La primera pregunta sugiere una atención exclusiva a la contribución visual y quizá una comprensión relativamente autónoma o independiente de esta en relación con el aporte lingüístico. Dicho de otra forma, parece privilegiar un estudio “por separado” de la contribución visual. Sin embargo, en la economía de la inferencia heterogénea, puede poseer interés entender cómo *cooperan* imagen y lenguaje. Tal vez la especificidad de la contribución visual sea descifrable más a partir de la exploración de tal interacción que por el discernimiento de las propiedades de la imagen solitaria. Luego una variante de aquella interrogante podría ser la siguiente:

1') ¿Cuál es la contribución específica de la sociedad visual-lingüística a la demostración heterogénea informal?

Es necesario remarcar el impacto holístico o estructural de la economía argumental heterogénea, a saber, esta no implica apenas adición de componentes lingüísticos y visuales. No se trata meramente de sumar elementos de diversa naturaleza; la interacción generada supone, es cierto, una auténtica “división del trabajo”, pero esta también alienta posibilidades innovadoras y plásticas. La heterogeneidad es auténtica y profunda; si hubiera que optar por una metáfora se trata mucho más de la *compenetración* de medios expresivos que de su mera *adición*.

Luego, la trama demostrativa no se reduce a ninguno de los componentes en solitario; en particular, no se agota en la acción del componente visual. Por ejemplo, la formulación del resultado a demostrar es tarea imprescindible lingüística. Se establece allí el nivel de

generalidad pretendido y esa operación ressignifica la totalidad de la estrategia mixta y, en particular, la comprensión del aporte del componente visual. La relevancia de la sociedad visual-lingüística en la trama demostrativa heterogénea puede sintetizarse en lo que se denominó su carácter *cooperativo*.⁹ ¿Es este énfasis absolutamente novedoso? Seguramente no. Por lo menos podría evocarse un antecedente notable. Resulta razonable atribuir una sensibilidad intelectual de este tipo al esfuerzo de Kenneth Manders por captar la originalidad de la demostración euclídea. En sus palabras:

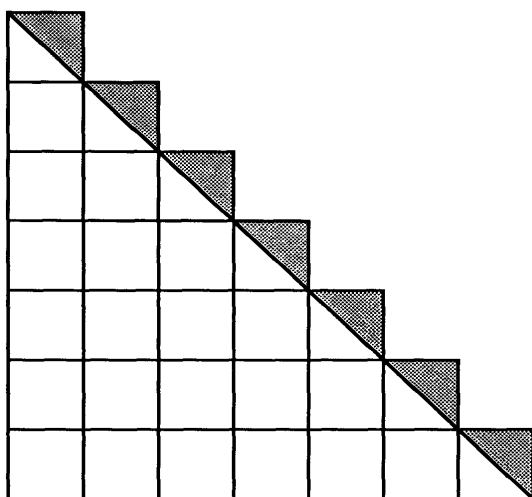
It is interesting to reclaim our philosophical grip on traditional geometrical reasoning especially because such reasoning coordinates two means of expression with very different characteristics: diagrams and ordinary text-based argument. Philosophers of our age seem to have ignored such representational contrasts, which nonetheless appear to be of great interest. (Manders, 1995: 80)

El autor llama la atención sobre el contraste entre ambos regímenes representacionales, pero a la vez apunta a la “coordinación” entre estos. El resultado es una iluminadora división del trabajo entre figuras y lenguaje, así como una intensa cooperación entre ellos, lo que permite captar el modelo de rigor que regula tales demostraciones. En tal sentido, podría decirse que el “contraste” va más allá del plano representacional, para alcanzar la propia dinámica demostrativa (Lasalle Casanave y Seoane, 2016). Por las razones antes apuntadas, no es plausible atribuir un protagonismo a tal interacción exclusivamente en el raciocinio geométrico; ni debiera asumirse en forma acrítica la identidad de modalidades, aun dentro de un área determinada de la matemática. Surge así una diversidad de interrogantes dignas de interés filosófico; entre otras: ¿cuáles son esas modalidades cooperativas en campos matemáticos diversos?, ¿cuán generalizables son determinadas tareas asumidas por una y otra forma de codificación de la información?, ¿cuán plásticas son estas formas en relación con las tareas a asumir en la economía inferencial?

Un examen rápido de la siguiente demostración heterogénea informal (esquemáticamente expuesta) permite ejemplificar algunas de las consideraciones esbozadas antes respecto a la cooperación visual-lin-

güística.

El lector puede reconstruir la demostración heterogénea a partir de esta imagen (las intervenciones lingüísticas necesarias dependen del contexto pero, como es obvio, al menos deben incorporar el enunciado del resultado a demostrar):¹⁰



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Como se señaló, aquello que se pretende demostrar es expresado lingüísticamente (y dicha cláusula aporta, además, el nivel de generalidad pretendido). Esta información da la clave para interpretar la figura: importa abstraer el patrón constructivo, independiente del número de cuadrados en cuestión. Si alguien reclamara una explicación o una explicitación de la estrategia demostrativa, el componente lingüístico resultaría decisivo para reconstruir la secuencia de “pasos” y, especialmente, para colaborar en el proceso abstractivo antes referido. Es interesante notar que tal elemento lingüístico debería (en una explicitación quizá extrema) contribuir a sugerir una representación visual “complementaria” a la explícitamente dibujada. En tal sentido, el trabajo del lenguaje y de la imagen parece exceder lo que en muchos contextos demostrativos heterogéneos hacen, pues aquí debieran cooperar en la comunicación de la imagen mental “complementaria”, cuyo papel en la economía de esta demostración es esencial y obvio.

El lector atento advertirá que en este caso se combinan la representación visual explícita (diagrama explícito) y la implícita (diagrama implícito), permitiendo apreciar la conveniencia de adoptar una definición de heterogeneidad que (como la arriba formulada) atiende a las dos dimensiones o modalidades representacionales. En realidad, esta característica no es un rasgo extraordinario del ejemplo considerado: el fenómeno frecuente en la inferencia heterogénea denominado “simetría” provee múltiples ejemplos de tal combinación de modalidad explícita y modalidad implícita.¹⁰

Los desarrollos que anteceden suponen indagar los rasgos característicos de la demostración informal heterogénea, con el objetivo de alcanzar una comprensión más fina de este tipo de trama argumental, más allá de un programa de traducción o rigorización formal. Dicho de otra forma, la cuestión a la que apunta un examen de esta naturaleza parece desbordar ampliamente aquellos aspectos directamente captados por la segunda pregunta arriba establecida, a saber, ¿cómo formalizar la demostración heterogénea informal? Una interrogante más amplia (que en cierta forma incluye la anterior) podría expresarse así:

2’) ¿Cómo caracterizar la inferencia heterogénea informal?

4.

La tercera pregunta asume que el contraste entre imagen y lenguaje se sitúa en una peculiar relación denotacional. Dicho de otra forma: ambos denotan; la diferencia reside en cómo lo hacen. La especificidad de la imagen es que entre ella y su denotado no existe (como en el lenguaje) un vínculo puramente arbitrario; la relación entre una y otro (en el caso de la imagen) deberá ser un isomorfismo o, al menos, un homomorfismo. Eso es lo que ocurre, dicen Barwise y Etchemendy, en los “buenos diagramas”. Eric Hammer estudia con cierto detenimiento esta idea; él la denomina “tesis del isomorfismo”. Según este autor entre sus promotores se encuentran Umberto Eco, Charles Sanders Peirce y Barwise y Etchemendy. Escribe Hammer:

All of these scholars refer to the “closeness” and “mirroring” of what is being represented by a diagram in the syntax of the diagram. Let’s call this the “isomorphism thesis”. (Hammer, 1995: 3)

Un aspecto encomiable del esfuerzo de Hammer es su preocupación por lograr avanzar en la comprensión de la relación pretendida entre la sintaxis del diagrama y su denotación (i. e. su semántica). Una primera condición que exige este autor es que tal sintonía sea fruto de una acción intencional:

A necessary condition for a symbol to be a diagram is that the connection between properties of the symbol and properties being asserted to hold in the world be intentional, not accidental.
(Hammer, 1995: 6)

Pero quizá el aspecto más relevante de su discusión sea la distinción entre los dos fenómenos que el autor denomina, respectivamente, “preservación literal” y “preservación no literal”. El primer caso se da cuando la relación que se pretende representar entre determinados objetos es la misma que se da en el diagrama entre los representantes de esos objetos. Por ejemplo, cuando la distancia entre los nombres de dos planetas representa proporcionalmente la distancia entre los planetas respectivos. El segundo caso se da cuando la relación no es la misma. Por ejemplo, la relación de inclusión física de un círculo dentro de otro (en los diagramas de Euler) representa la inclusión de conjuntos que, ciertamente, no es una relación de inclusión física. Observa justamente este autor que la tesis del isomorfismo resulta muy atractiva cuando se trata de dar cuenta de la preservación literal, pero resulta menos obvia cuando la preservación ya no es literal. En particular, la introducción de un componente convencional (que supone la adopción de la preservación no literal) podría pensarse que importa el abandono de la búsqueda de identificar cualquier similitud o semejanza entre el diagrama y lo representado. Esta parecer ser, por ejemplo, la conclusión a la que arriba Eco. El dictamen de Hammer es otro:

[...] it seems that one can agree with him in that iconic symbols, at least diagrams, have the meaning they do because of previously established conventions. But it doesn't seem that such conventionality rules out a very simple and straightforward notion of resemblance between a diagram and what represents, given those

conventions. (Hammer, 1995: 8)

La estrategia de este autor es, en cada caso, proponer la reducción de la preservación no-literal a la preservación literal, mediante la adopción de una relación más abstracta o general. Por ejemplo, como se señaló arriba, la relación de inclusión entre conjuntos no es una relación física. Es decir, el diagrama de Euler correspondiente fracasa en términos de preservación literal:

In particular, it seems that one can agree with him that iconic signs, at least diagrams, have the meaning they do because of previously established conventions. But it doesn't seem that such conventionality rule out a very simple and straightforward notion of resemblance between a diagram and what it represents, given those conventions. (Hammer, 1995: 8)

Asúmase que el componente sintáctico relevante del diagrama (en términos representacionales) es la superficie, no exclusivamente el círculo. Entonces la relación sintáctica relevante es la de “ser parte de”: A “es parte de” B. Ahora se establece la relación entre conjuntos: A es parte de B si y solamente si A es un subconjunto de B. Esta operación permitiría así recuperar la literalidad perdida y añorada. Hammer señala explícitamente las severas dificultades que exhibe esta estrategia. Su conclusión final es abiertamente más moderada:

The property of having a strong isomorphic connection with the world is not so much a criterion required for a representation to be a diagram, but rather a normative criterion, a criterion needed for a diagram to be a good diagram. Having an isomorphic connection to the world is what makes diagrams visually compelling. (Hammer, 1995: 12)

Esta rápida excursión a las discusiones sobre la tesis de isomorfismo no pretende resumir el estado del debate. Su objetivo (como seguramente el lector ya sospecha) es muy distinto: se trata de ilustrar la importancia de aquella orientación que llama la atención hacia la relación entre la imagen y su denotación como clave para diferenciarla

del lenguaje. O, en su acepción más módica, diferenciar los “buenos diagramas” (del lenguaje y de los diagramas menos eficientes).

Atsushi Shimojima describe un panorama de los criterios propuestos para distinguir adecuadamente lo visual de lo lingüístico (Shimojima, 2001). Este autor expone y evalúa diversas alternativas (incluida su propia propuesta). Algunas de ellas asumen explícitamente el compromiso denotacional; otras dejan la cuestión abierta, pero pueden entenderse como complementarias de una tal perspectiva. Quizá sólo una de estos esfuerzos (originado en una observación de Bertrand Russell acerca de la diferencia entre usar un signo para referir a una relación o usar para ello a su vez una relación¹²) sugiera un enfoque diferente, pero ese aspecto particular no merece (en el contexto de la discusión referida) ningún desarrollo. ¿Es esta concepción denotacional extraña o sorprendente? La respuesta debiera ser: no. En buena medida, dicha concepción formaba parte de cierto clima intelectual; el influyente enfoque de Goodman no deja lugar a la menor duda:¹³

A picture that represents—like a passage that describes—an object refers to and, more particularly, denotes it. Denotation is the core of representation and is independent of resemblance. (Goodman, 1976: 5)

En síntesis, independientemente de los méritos o deméritos de las diversas propuestas, ninguna de ellas supone una alternativa (al menos desarrollada con cierto mínimo nivel de detalle) a la opción denotacional. De esta forma, aunque puedan enfatizarse en ellas otros aspectos de enorme interés, respecto del punto aquí en debate y más allá de sus eventuales calidades, no ofrecen novedad alguna.

Sin embargo, una mirada a la reflexión filosófica convocada por los enigmas de la imagen (originalmente motivada en el interés estético) sugiere la inconveniencia de asumir (en forma acrítica) que la única relación posible imagen-representado sea la relación denotacional. Estas observaciones estimulan entonces una reformulación ampliatoria de la cuestión discutida en esta sección. Esta podría formularse así:

3') ¿Cuál es la especificidad representacional de la imagen (que permite diferenciarla del lenguaje) en el contexto de la inferencia informal

heterogénea?

John Kulvicki, en una obra reciente, ha presentado un panorama de las respuestas dadas por la filosofía de la imagen a la cuestión de cómo esta representa.¹⁴ En una forma algo grosera, podrían tales alternativas denominarse así: teorías de la experiencia, del reconocimiento, de la semejanza, de la simulación y, finalmente, teorías estructurales. Las primeras procurarían captar la singularidad o especificidad de la experiencia involucrada en la apreciación de la imagen figurativa; las segundas se concentrarían en la identidad de recursos o procesos puestos en obra frente a la imagen y a lo representado por ella; las terceras resaltan la semejanza o similitud entre la representación y su “tema” como la clave para comprender la peculiaridad de la recepción de la imagen figurativa; las cuartas apuntan a entender las imágenes como “sustitutos” visuales de lo que ellas representan, permitiendo tales “simulaciones” operar con ellas “como si” operásemos con lo representado; las últimas son, precisamente, las estructurales: las imágenes figurativas comparten o preservan la estructura de lo que representan. Es fácil clasificar los enfoques inspirados en “la tesis del isomorfismo” como estructurales.¹⁵

A primera vista, no todas estas alternativas poseen la misma capacidad contributiva al problema aquí discutido. Kulvicki parece descalificar las tres primeras en su capacidad de dar cuenta de representaciones tales como diagramas, figuras, etcétera. En palabras del autor,

Experience, recognition, and experienced resemblance theories might capture what is special about depiction but they fail to engage much with graphs, diagrams, and other images, broadly speaking. (Kulvicki, 2014: 15)

Sin embargo, al discutir específicamente la “imagen científica”, este autor advierte que las teorías de la representación científica se han desarrollado en buena medida de espaldas a la elaboración desarrollada en el campo de la reflexión sobre el arte

[...] even though resemblance, pretense, and structures theories can be applied readily to scientific representations of many kinds.

Part of this reason for these is that the work in early chapters fall under the heading Philosophy of Art. There is no rich tradition of making diagrams, graphs, and tables as art, despite how artfully some of them represent, and so most theories the star with the arts do not emphasize representations in science, pretense and structure included. We will see that, despite this, work of philosophy of art can inform the philosophy of art and vice versa. (Kulvicki, 2014: 133-134)

¿Representan algunas de aquellas concepciones filosóficas alternativas sólidas a la asunción denotacional? ¿Son los enigmas de la representación artística absolutamente ajenos a los enigmas de la representación científica? En particular, ¿cuánto podría aprender la filosofía de la práctica matemática de estos variados esfuerzos originalmente surgidos en el contexto de la filosofía del arte? Podría razonablemente sospecharse el interés de enfoques que permitan, como estrategia más apropiada para la mejor comprensión de la práctica, la complementariedad más que la exclusión. Tales inquietudes son alentadas por el amplio horizonte abierto por 3’.

5.

Se han identificado algunas cuestiones cuya valía e influencia son reconocidas y apreciadas. Este escrito no pretende entonces proponer su rechazo o abandono. Por el contrario, procura evidenciar su fecundidad y, a la vez, llamar la atención sobre ciertos aspectos que merecen ser incorporados a la agenda de investigación sobre heterogeneidad en matemáticas. Esta complementación o enriquecimiento puede expresarse como una *reformulación* de aquellas cuestiones iniciales. Quizá los dos aspectos más relevantes en esta dirección puedan identificarse así. Por una parte, la posibilidad de reconsiderar la especificidad de la modalidad representacional propia de las imágenes, abandonando la suposición denotacional como exclusiva. Por otra parte, el reconocimiento de la relevancia de la sociedad visual-lingüística en el contexto de la demostración matemática heterogénea informal, y el interés de explorar las diversas modalidades de concretarse en las distintas áreas de la matemática.

Referencias

Allwein, G. y Barwise, J. (eds.) (1996) *Logical Reasoning with Diagrams*, EE. UU.: Oxford University Press.

Barwise, J. y Etchemendy, J. (1991) "Visual Information and Valid Reasoning", reimpresso en Allwein, G. y Barwise, J (eds.) (1996).

Blackwell, A. (2001) (ed.) *Thinking with Diagrams*, Países Bajos, Springer.

Caorsi, C., Navia, R. y Sautter, F. (eds.) (2016) *Significado y negación: escritos lógicos, semánticos y epistemológicos*, Uruguay: CAPES-UdeLaR.

Goodman, N. (1974) *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols*, EE UU, Hackett Publishing Company.

Hammer, E. M. (1995) *Logic and Visual Information*, CSLI.

Kulvicki, J. (2014) *Images*, Routledge, Reino Unido y EE UU.

Lassalle Casanave, A. y Seoane, J. (2016) "Las demostraciones por absurdo y la Noción Común 5", en Caorsi, Navia y Sautter (2016).

MacFarlane, J. (2000) "What does it mean to say that logic is formal?", Ph. D. Thesis, University of Pittsburgh.

Mancosu, P. (ed.) (2008) *The Philosophy of Mathematical Practice*, EE UU, Oxford University Press.

Manders, K. (1995) "The Euclidian Diagram", en Mancosu, P. (2008).

Nelsen, R. (1993) *Proofs without Words. Exercises in Visual Thinking*. EE UU: The Mathematical Association of America.

Nelsen, R. (2000) *Proofs without Words. Exercises in Visual Thinking*

2. EE UU: The Mathematical Association of America.

Luengo, I. (1996) "A Diagrammatic Subsystem of Hilbert's Geometry", en Allwein, G. y Barwise, J (1996).

Shimojima, A. (1996) "On the Efficacy of Representation", Ph. D. Thesis, EE UU, The Department of Philosophy, Indiana University.

Shimojima, A. (2001) "The Graphic-Linguistic Distinction", reimpresso en Blackwell, A. (ed.) (2001).

Shin, Sun-Joo (1994) *The logical status of diagrams*, EE UU, Cambridge University Press.

Tennant, N. (1986) "The withering away of formal semantics", *Mind and Language* vol. 1, No. 4, pp 302-318.

Notas

¹Deseo agradecer las observaciones de un árbitro anónimo que (creo) me ayudaron a precisar algunos argumentos. Los errores subsistentes son de mi entera responsabilidad.

²Un interesante estudio acerca de los sentidos del término "formal" cuando se aplica a la lógica se encuentra en MacFarlane (2000).

³Tal alternativa se encuentra sugerida en un pasaje de Barwise y Etchemendy (1991: 13): "Visual information can also be integral to the reasoning itself. At its most explicit, such reasoning will employ an actual diagram, as in the examples above. In other cases, there may be no need for such an explicit diagram, since the reader will be able to visualize the steps without it". Por supuesto, parece pertinente preguntarse en qué forma podría (en base a recursos exclusivamente lingüísticos) lograrse tal efecto.

⁴Aunque no se atenderá en este trabajo, merece repararse en la cuestión siguiente. El contraste heterogeneidad expresiva/heterogeneidad inferencial no es equivalente a la distinción irrelevancia cognitiva/relevancia cognitiva. Desde el punto de vista epistémico, las modalidades o formas expresivas suelen resultar importantes.

⁵Véase Allwein y Barwise (1996: 4-25). Este artículo apareció originalmente en 1991. Se citará por ello como Barwise y Etchemendy (1991) pero por el número de página de esta reimpresión de 1996.

⁶Por ejemplo, un argumento a favor del logocentrismo aparece esbozado en Tennant (1986). Una reconstrucción y discusión detallada se encuentra en Seoane (2011).

⁷La codificación del mapa es, obviamente, heterogénea, pero el acento de los autores comentados está en la contribución visual.

⁸Por supuesto no se pretende atribuir a Frege la noción contemporánea de sistema formal, pero sí su pertenencia a una tradición formalizadora que asume, en nuestros días, tal herramienta. Esta parece ser, por otra parte, la interpretación natural del pasaje citado.

⁹Esta atribución aparece en Seoane (2013), conjuntamente con otra serie de rasgos que caracterizarían las demostraciones heterogéneas informales.

¹⁰La imagen se ha tomado del excelente libro de Nelsen (1993: 70). Si el lector está interesado en explorar demostraciones que se apoyan en el componente visual se le recomienda enfáticamente que consulte, además del libro referido, Nelsen (2000).

¹¹Por una caracterización sucinta de la simetría puede consultarse, por ejemplo, Barwise y Etchemendy (1991: 24-25).

¹²Un tratamiento de tal observación en esta clave puede leerse en Simojima (2001: 10-12).

¹³Véase Goodman (1976: 5). La influencia de este filósofo, por ejemplo, en Shimojima es explícita; véase Shimojima (1996: 1).

¹⁴Véase Kulvicki (2014). Una exposición precisa del esfuerzo sistemático emprendido por este autor excede en mucho la estrategia esquemática aquí adoptada, pero a los fines de esta reflexión se entiende esta aproximación parcial esencialmente correcta.

¹⁵Por un esfuerzo clasificatorio semejante, puede consultarse Abell y Bantinaki (2010).

José Seoane
seoanejose2010@gmail.com

José Seoane es Magister en Lógica y Filosofía de la Ciencia por la Universidad de Campinas (Brasil) y Doctor en Filosofía por la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina). Ha publicado un libro, *Lógica y Argumentación*, y artículos en revistas especializadas en las áreas de lógica y filosofía e historia de la lógica. Es docente de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, de la Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. Ha sido Decano de dicha Facultad y presidió el Consejo Directivo Central de la Administración Nacional de la Educación Pública. Su trabajo de investigación en la actualidad se concentra en la reflexión filosófica sobre la demostración heterogénea, los procesos elucidatorios en matemática y la contribución a la reflexión meta-argumental de Vaz Ferreira. Se desempeña asimismo como Coordinador del Instituto de Filosofía de la FHCE y dirige el Departamento de Lógica y Filosofía de la Lógica de dicho instituto.