REVISTA DE LA ENSEÑANZA DE LA FISICA - Vol.3 N° 1 (1990)

LA SIMETRIA DE ESCALA Y LA SIMILARIDAD EN LA FISICA

JULIO GRATTON [a]

PRIFIT Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Pabellón I, Ciudad Universitaria
1428 Buenos Aires

LUIS H. CANDERLE

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
Av. Uruguay 151
6300 Santa Rosa, La Pampa

[a] Investigador del CONICET

RESUMEN: Se presentan los conceptos básicos de la simetría de escala y la similaridad en la Física y se examinan ejemplos de su aplicación a una variedad de problemas.
Algunos de estos han sido incluidos en las clases por uno de los autores.

ABSTRACT: *The basic ideas of scale symmetry and similarity in Physics are introduced, and some examples of its applications to various phenomena are discussed. Some of the examples have been used in the classroom by one of the authors.*

Introducción

Es bien sabido que la simetría de los sistemas físicos, esto es, la propiedad de ciertos sistemas de permanecer sin cambio (invariancia) cuando se realizan determinadas transformaciones, tiene importantes consecuencias que se traducen en la conservación de magnitudes físicas. De resultas de ello la solucion de muchos problemas se hacen más simples. Asi es, por ejemplo, que la homogeneidad del espacio implica que un sistema aislado es invariante bajo traslaciones, y esto a su vez tiene como consecuencia la conservacion de la cantidad de movimiento del sistema. Esto permite simplificar el estudio del movimiento de un conjunto de partículas que interactuan una con otra gracias a que se puede separar el movimiento del centro de maza del sistema del movimiento relativo de las partículas con respecto de dicho centro. De manera semejante, la isotropía del espacio implica que un sistema aislado es invariante frente a rotaciones, lo que lleva a que conserva su momento angular.
Es bien sabido como esta circunstancia permite simplificar el estudio del movimiento planetario. Podrían citarse otros ejemplos, y todos ellos enseñan que el analisis de las propiedades de simetría es un auxiliar poderoso en el estudio de todo fenómeno físico. Las simetrías arriba citadas y otras de los sistemas físicos tienen su origen en propiedades geométricas generales del espacio-tiempo, así como características de los sistemas mismos. Sin envargo, las magnitudes físicas no se caracterizan solo por tener propiedades geométricas, sino también por sus dimensiones, que se relacionan con las unidades en las que se miden. De resultas de esto hay en la física, además de las simetrías de origen geométrico, otras que derivan de que la elección de las unidades de medida es arbitrarias, y no guarda relación con las sustancias de los fenómenos. Esta es en esencia la simetría de escala, y su manifestación consiste en que la descripción de los fenómenos físicos debe ser invariante respecto de cambios en las unidades de medida, o lo que es equivalente frente a cambios de escala de las magnitudes mismas.

En este trabajo presentaremos en forma elemental e intuitiva el concepto de simetría de escala en la física y analizaremos algunas de sus consecuencias, con el énfasis en ejemplos que muestran como estas ideas pueden ser aprovechadas para atacar problemas concretos.

La idea de similaridad (o semejanza) en la Física es una generalización de la semejanza geométrica. Por eso comenzaremos por recordar este último concepto, y luego nos referiremos a la similaridad física. A continucación presentaremos tres ejemplos concretos que ilustran distintas facetas de la aplicación de estas ideas; el primero y el tercero están desarrollados en la literatura, pero el segundo creemos es original.

Más adelante presentaremos el concepto de autosimilaridad, de gran importancia en muchos capítulos de la física, particularmente en la mecánica de los fluidos (hidrodinámica y dinámica de los gases). Concluye el trabajo con algunos comentarios acerca del empleo de las ideas de similaridad en la enseñanza de la física con referencia en particular a las materias de los primeros años.

Nuestra presentación será intuitiva y sin pretensión de rigor. Evitaremos en lo posible estar en complicaciones matemáticas. Para quienes deseen profundizar estos temas hemos incluido al final del artículo una lista de referencias.

En lo que sigue supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos de unidades y dimensiones en física, a nivel elemental.

Similaridad Geométrica

En su forma más simple la noción de semejanza geométrica se puede expresar diciendo que "Dos figuras geométrica son semejantes si las razones (cocientes) entre todas las correspondinetes longitudes son idénticas".

Es así que (ver Fig. 1) los polígonos F y F' son semejantes ya que:

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \cdots = r$$

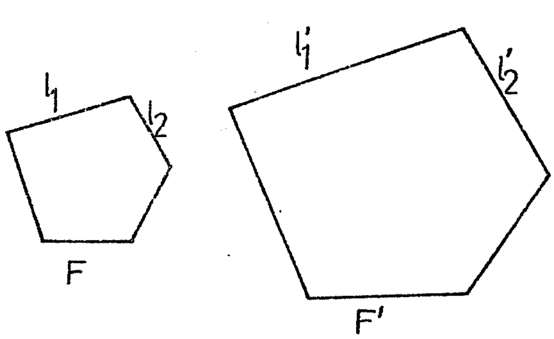

Fig. 1

La razón r se llama "razón de semejanza", o "factor de escala", o simplemente "escala".

Una transformación de similaridad (o de semejanza): F ⟶ F'

se efectúa mediante un cambio de escala:

$$l'_1 = r l_1 \ ; \ l'_2 = r l_2 \ ; \ \ldots ,$$

o sea, todas las longitudes l'_i de F'se obtienen multiplicando las correspondientes longitudes l_i de F por el factor de escala r.

Un concepto relacionado, pero algo más general, es el de la similaridad afín, o afinidad. Se habla de similaridad afín cuando existe semejanza, pero referida solo a un particular sistema de parámetros. Vamos a aclarar esto con un ejemplo.

Supongamos haber elegido en el plano un particular sistema de ejes cartesianos (x,y). Si P=(x,y) representa un punto de una cierta figura F y P'=(x',y') representa el correspondiente punto P'de la figura F'(ver Fig. 2), se dice que F, y F' son afines, o tienen semejanza afín, si se cumple:

$$\frac{x'}{x} = r_x = cte_x$$

$$\frac{y'}{y} = r_y = cte_y$$

para todo par de puntos correspondientes P, P' de F y F'.

Se ve de la figura 2 que todo par de elipses F y F' es afín, si referimos las elipses a un sistema de ejes con origen en el centro de las figuras y orientados a lo largo de los semiejes de las mismas. Esta elección de ejes, respecto de los cuales se define la afinidad, es el particular sistema de parámetros al que nos referíamos arriba.

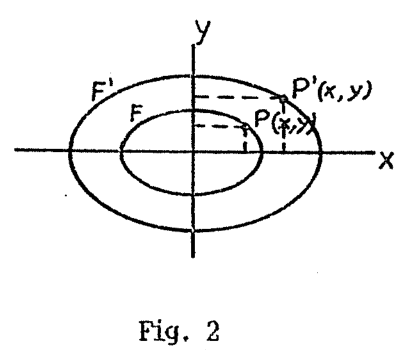

Fig. 2

Recordemos que un método sencillo para construir elipses se basa precisamente en la afinidad entre la elipse y el círculo.

Un importante concepto relacionado con toda clase de transformaciones (y en particular con las de semejanza y semejanza afín) es el de invariante. Un invariante es una entidad que no cambia si se realizan transformaciones (en el caso que nos interesa, semejanzas y afinidades). Aclaremos esto con un par de ejemplos.

a) Consideremos el ángulo α de vértice O que tiene por lados las semirrectas OA y OB (ver Fig. 3). Sea S el arco de una circunferencia con centro en O, radio r, subtendido por α.

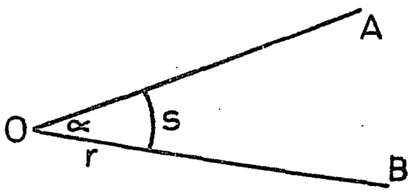

Fig. 3

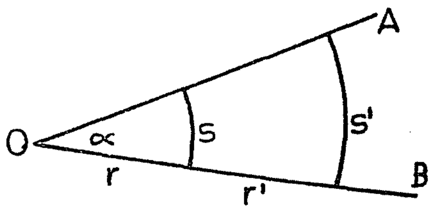

Fig. 4

Consideremos ahora la transformación de semejanza: $(r,s) \longrightarrow (r',s')$, que hace corresponder a s y r un nuevo arco s' y un nuevo radio r' (Fig. 4). es evidente que el cociente entre el arco y el radio, esto es, el ángulo subtendido por el arco, es un invariante:

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'} = \text{invariante}$$

Por lo tanto, los ángulos son invariantes de escala. Por otra parte es fácil ver que los ángulos no son invariantes afines.

b) Consideremos la relación entre el área y las dimensiones lineales de los elementos rectangulares de la Fig. 5.

Se tiene que:

$$\sigma = \frac{ds}{dx\ dy} = \frac{ds'}{dx'\ dy'}$$

y en consecuencia σ es un invariante de escala, pero en este caso es un invariante afín.

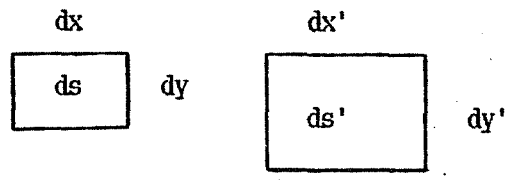

Fig. 5

Leyes de Escala

La simetría frente al cambio de escala, esto es, la existencia de invariantes, permite obtener leyes de escala. Por ejemplo, si S y S' son las superficies de dos figuras semejantes F y F', y l y l' son dos longitudes correspondientes cuales quiera asociadas a F y F', como se muestra en la Fig. 6, tendremos entonces que:

$$\frac{S}{l^2} = \frac{S'}{l'^2} = \Pi = \text{invariante}$$

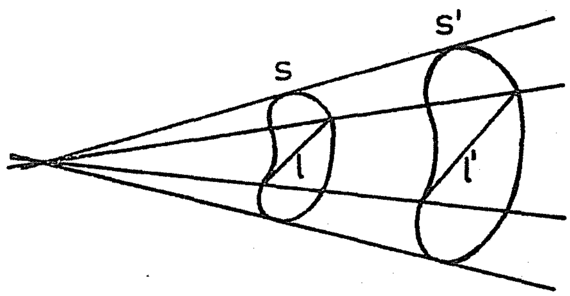

Fig. 6

y a partir de esta relación obtenemos la ley de escala:

$$S = \Pi l^2$$

que expresa que el área de una figura geométrica cualquiera aumenta en proporción al cuadrado de las dimensiones lineales de la misma. Aquí Π solo puede depender de otros invariantes que determinan la forma de la figura (por ejemplo, si la figura es un polígono, esos invariantes serán los ángulos entre los lados).

Como aplicación de la ley de escala de las áreas vamos a obtener el teorema de Pitágoras. Consideremos a esos efectos el triángulo rectángulo de lados a, b, c, (ver Fig. 7), al que dividimos en dos partes, que llamaremos triángulo 1 y 2, bajando la perpendicular a la hipotenusa desde el vértice opuesto.

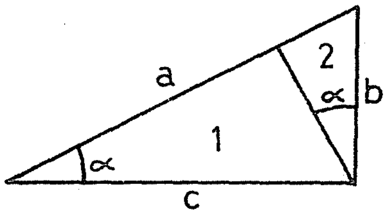

Fig. 7

El área del triángulo es igual a la suma de las áreas de los triángulos 1 y 2:

$$S_{abc} = S_1 + S_2$$

Observese que los triángulos (abc), 1 y 2 son semejantes. Pero para todo triángulo rectángulo de hipotenusa h, se debe cumplir que:

$$S = \pi h^2$$

donde el invariante π solo puede depender de otros invariantes que determinan la forma del triángulo rectángulo. Debe ser en consecuencia

$$\pi = f(\alpha)$$

donde α indica uno de los ángulos adyacentes a la hipotenusa. Pero entonces, sustituyendo en la expresión del área, resulta:

$$f(\alpha)a^2 = f(\alpha)b^2 + f(\alpha)c^2$$

y simplificando el factor común f(α) obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que es el resultado buscado. Dejamos para el lector analizar que sucede con los triángulos rectángulos sobre la superficie de la esfera.

Por último, vamos a deducir la fórmula del área de una elipse como consecuencia de la semejanza afín. Para eso consideremos la elipse del área S_e y semiejes a,b (Fig. 8).

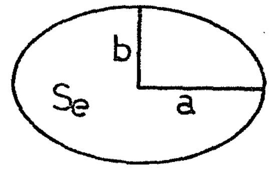

Fig. 8

Es evidente, si recordamos lo dicho en el punto b) del parágrafo precedente que la relación

$$\frac{S_e}{ab} = \pi_e$$

es un invariante afín, y en este caso, un número (pues la elipse queda definida por los semiejes a,b). Vale por lo tanto la ley de escala:

$$S_e = \pi_e ab$$

Aquí π_e debe ser el mismo para todas las elipses, y por lo tanto se puede determinar de una vez y para siempre usando la elipse que más convenga. En particular el círculo de una elipse especial con a=b. Luego:

$$\pi_e = \pi = 3{,}1415926\ldots,$$

y por consiguiente la fórmula que da el área de una elipse es:

$$S_e = \pi ab.$$

Semejanza Física

La semejanza física es análoga a la semejanza geométrica, con la salvedad que debe tomar en cuenta que las magnitudes físicas se caracterizan por otras dimensiones, además de aquellas de carácter geométrico. Se dice que dos fenómenos físicos son semejantes cuando las características de uno se pueden obtener a partir de las características asignadas del otro mediante un simple cambio de escala. Dicho cambio de escala es análogo a la transformación de un sistema de unidades de medida a otro.

Para llevar a cabo la transformación se deben conocer los factores de escala. La semejanza en física es la base del empleo de modelos a escala de laboratorio para estudiar el comportamiento de sistemas y dispositivos de gran tamaño.

Nada mejor que considerar un caso concreto para aclarar la idea de semejanza física. Sea, por ejemplo el movimiento pendular. Veremos que el movimiento de un péndulo forma parte de una clase de fenómenos semejantes, lo cual es consecuencia de la invariancia de escala de la ecuación del movimiento:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\Theta$$

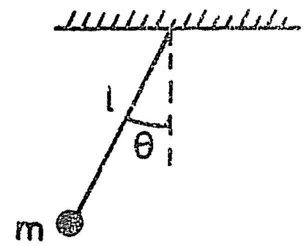

Fig. 9

donde Θ indica el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical, m es la masa del péndulo, l su longitud, y g es la aceleración de la gravedad (Fig. 9). La invariancia se puede verificar explícitamente. Si se escalan todas las longitudes por un factor r_l ($l'=r_l l$), todos los tiempos por un factor r_t ($t'=r_t t$), y todas las masas por un factor r_m ($m'=r_m m$), se tendrá que:

$$g' = r_l\, r_t^{-2} g \;;\; \Theta' = \Theta$$

y sustituyendo en la ecuación del movimiento obtenemos:

$$\frac{d^2\Theta'}{dt'^2} = -\frac{g'}{l'}\,\mathrm{sen}\,\Theta'$$

es decir, las magnitudes transformadas satisfacen la misma ecuación que las magnitudes sin transformar: la ecuación del movimiento no cambia. En consecuencia, las características del movimiento de un péndulo se pueden obtener a partir de las características del movimiento de otro péndulo mediante un simple cambio de escala. Nótese que también se deben incluir entre las características cuya escala se cambia, a las condiciones iniciales (que no aparecen en la ecuación del movimiento).

La simetría de escala se pone de manifiesto si se escribe la ecuación del movimiento en términos de los invariantes de escala:

$$\Theta \;,\; \tau = \frac{t}{T} \;,\; \Pi = T^2\,\frac{g}{l}$$

donde T indica el período de la oscilación:

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2} = -\Pi\,\mathrm{sen}\,\Theta$$

Esta ecuación está escrita enteramente en términos de invariantes, luego es invariante.

A partir del invariante Π se obtiene la ley de escala del período:

$$T = (\Pi\; l/g)^{1/2}$$

Aquí Π puede depender tan solo de invariantes constantes, y el único invariante constante es Θ_0, la amplitud de la oscilación. Por consiguiente,

$$\Pi^{1/2} = f(\Theta_0)\,,$$

y resulta:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\; f(\Theta_0)\;;$$

es el caso límite de oscilaciones pequeñas ($\Theta_0 \to 0$), Π debe ser independiente de Θ_0 y en consecuencia f debe tender a un valor constante (el valor de esta constante es naturalmente $\frac{1}{2}\Pi$, pero esto no se puede deducir de consideraciones del tipo que estamos haciendo aquí).

A partir del ejemplo que se acaba de discutir podemos hacer algunos comentarios y generalizaciones.

Observamos en primer lugar que los invariantes de escala son siempre magnitudes sin dimensiones (adimensionales), es decir, magnitudes cuyo valor es independiente del sistema de unidades que se hubiera elegido. Los invariantes se construyen combinando las variables, parámetros y constantes físicas dimensionales del problema.

En segundo lugar notamos que toda relación física correspondiente a un dado problema (ecuaciones del movimiento, condiciones de equilibrio, condiciones iniciales y de contorno, etc.) se puede expresar como una relación entre invariantes de escala, es decir, entre magnitudes sin dimensiones.

Estos resultados son consecuencia del hecho que la elección que el sistema de unidades de medida es arbitraria y no tiene conexión con la sustancia del fenómeno, tal como se dijo en la Introducción.

De lo expresado se desprende que dos fenómenos son semejantes si, y solo si, todas sus variables y parámetros adimensionales tienen los mismos valores numéricos.

El Análisis Dimensional nos permite determinar las combinaciones adimensionales adecuadas a cada problema en particular. El Teorema Pi permite determinar el número de combinaciones adimensionales independientes que pueden formarse a partir de las cantidades dimensionales correspondientes a un problema dado.

Respecto de la importancia y utilidad de la simetría de escala, y de sus consecuencias, podemos hacer el siguiente comentario:

a) Cuando se conocen las ecuaciones que rigen al problema, los parámetros, variables y constantes se determinan por inspección y son la base para discutir la semejanza, efectuar las consideraciones dimensionales y obtener las leyes de escala. En estos casos la simetría de escala es útil porque simplifica la investigación al reducir el número de parámetros y al restringir las dependencias funcionales.

b) En ciertos casos no se puede resolver el problema por el proceso de análisis y cálculo, porque las dificultades matemáticas son demasiado grandes, o porque el problema no se puede formular matemáticamente pues el fenómeno bajo estudio es demasiado complejo, o finalmente porque nuestro conocimiento es incompleto. Cuando esto ocurre la simetría de escala y las consideraciones dimensionales siguen siendo de ayuda por que permiten investigar experimentalmente el problema mediante modelo a escala conveniente, o bien por que permiten obtener en forma directa y rápida respuestas aproximadas o cualitativas. En muchos casos esto puede ser todo lo que se requiere o que se puede esperar obtener. Finalmente, este tipo de análisis permite inferir ideas acerca de la naturaleza del conocimiento que está faltando, y de este modo indica en que dirección se debe seguir investigando.

En lo que sigue ilustraremos estas posibilidades a través de algunas aplicaciones.

Aplicaciones

a) La Ley de Wien y la radiación del cuerpo negro.

En un cuerpo negro, la frecuencia para la cual la densidad de energía radiante por unidad de intervalo de frecuencia, u( ), es un máximo que varía directamente con la temperatura (Fig. 10), un resultado conocido como la ley de Wien:

$$\nu_m \sim T.$$

Vamos a discutir ahora las consecuencias que pueden obtenerse de dicha ley en base a consideraciones dimensionales.

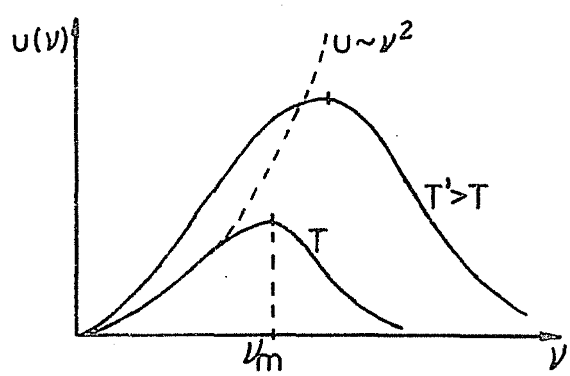

Fig. 10

Vamos a tomar como dimensiones básicas a las de tiempo (t), longitud (l), energía (e) y temperatura (θ). Entonces, la densidad de energía por unidad de intervalo de frecuencia, u, tienen las dimensiones:

$$[u] = e\,t\,l^{-3}$$

Pero u depende de ν, T, y de constantes universales:

$$u = u(\nu, T, \text{ctes. universales}).$$

Estas constantes universales no pueden ser otras que la velocidad de la luz, c, y la constante de Boltzmann, k, dentro del marco de la física clásica. Las dimensiones de ν, c y k son:

$$[\nu] = t^{-1} \; ; \; [c] = lt^{-1} \; ; \; [k] = e\Theta^{-1}.$$

En consecuencia solo se puede formar un grupo de semejanza que contiene u:

$$\Pi = \frac{u\ c^3}{\nu^2 kT}$$

Aquí Π debe ser una constante universal adimensional (su valor, de acuerdo con los cálculos de Rayleigh es de 8π). Resulta en consecuencia la siguiente ley de escala para u:

$$u = \Pi \frac{\nu^2 kT}{c^3} \sim \nu^2$$

El análisis dimensional muestra que este es el único resultado posible en el marco de la física clásica. Sin embargo, esta ley de escala no es correcta: no se cumple la ley de Wien, y además, la densidad de energía (que se obtiene de u integrando a todas las frecuencias) es divergente. Nótese que no hay solución posible -siempre dentro de la física clásica- para esta dificultad, porque por la ley de Kirchhoff ninguna otra variable puede intervenir en el problema. ¿Qué se puede hacer entonces?. El análisis dimensional indica la causa última de la dificultad, y por ende en que dirección hay que buscar la solución. Lo que pasa es que en la teoría está faltando una constante universal dimensional, que permita establecer una "escala natural" de frecuencia, en otras palabras, que nos permita obtener un parámetro con el cual comparar ν, que nos debe decir cuándo $u(\nu)$ debe comenzar a descender en el gráfico de la figura 10.

Mediante el análisis dimensional podemos caracterizar la nueva constante física. En efecto al existir otra constante (además de c y k) habrá un nuevo grupo, Π', independiente de Π. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que:

$$\Pi' = \alpha \nu T^n$$

donde α representa una combinación (por ahora no especificada) de c, k y la nueva constante, y n es un exponente que habrá de determinar.

Pero ahora el invariante Π ya no será más una constante como antes, sino que será una función del nuevo invariante Π':

$$\Pi = f(\Pi'),$$

y entonces la ley de escala de u será:

$$u = \frac{\nu^2 kT}{c^3} f(\alpha \nu T^n)$$

El exponente n se puede determinar si observamos que de ser correcta la teoría, u debe satisfacer la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\int_0^\infty u d\nu = aT^4$$

Aquí a indica una constante universal (la constante de Stefan-Boltzmann). Es fácil verificar que esto requiere n=-1. Luego:

$$u = \frac{\nu^2 kT}{c^3} f\left(\alpha \frac{\nu}{T}\right)$$

Es usual escribir $\alpha = h/k$, donde h es una constante universal. La expresión de u queda entonces de la forma:

$$u = \frac{\nu^2 kT}{c^3} f\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Las dimensiones de la constante h son: [h]=et. Entonces, la nueva constante universal (que no es otra, por supuesto, que la constante de Planck) debe tener las dimensiones de acción.

Es fácil ver que la expresión que hemos obtenido implica la ley de Wien. En efecto,

$$u = \frac{k^3 T^3}{h^2 c^3} x^2 \ f(x)$$

con:

$$x = h\nu/kT$$

Para una temperatura fija, el máximo de u, u_{max} ocurrirá para cierto $x=x_m$=una constante universal (un número). Pero esto significa que:

$$\nu_m = x_m\ kT/h \sim T$$

esto es la ley de Wien.

Hasta aquí se puede llegar por medio del análisis dimensional. Por sí solo, el análisis dimensional no permite determinar la forma funcional de f(x), ni el valor de h. Por otros medios que no vamos a discutir aquí por que se pueden ver en cualquier buen texto de Física Moderna, se encuentra que:

$$f(x) = \frac{8\pi x}{e^x - 1}$$

En la Física Atómica se pueden encontrar varios bellos ejemplos que muestran como se puede hacer estimaciones sencillas basadas en el análisis dimensional. Por eso, es fácil hacer estimaciones de orden de magnitud de propiedades atómicas tales como el tamaño, la energía del estado fundamental, la vida media de niveles excitados, etc, en términos de e, m (carga y masa del electrón), h y c. No daremos aquí los detalles para abreviar. En cambio mostraremos un par de aplicaciones sacadas de la física más cotidiana, esto es, la física macroscópica.

b) La consolidación de suelos.

Los edificios construidos sobre suelos arcillosos tienden a asentarse lentamente. Si el asentamiento es desparejo, como puede ocurrir si se extiende una construcción preexistente, los muros de mampostería se pueden agrietar. Esto es bastante común en nuestro país. La causa del asentamiento es el proceso de consolidación, que resulta de la lenta expulsión del agua que llena los poros del suelo. La arcilla es una estructura de partículas minerales muy poco permeable al agua pero bastante compresible. Esto se debe a que pese a ser muy porosa (es decir, los huecos entre las partículas constituyen una fracción considerable del volumen total) los pasajes que conectan a los poros entre sí son muy pequeños. Los poros están llenos de agua, que es intrínsecamente menos compresible que la matriz mineral que la rodea.

Cuando se apoya una carga en el suelo, ésta es al comienzo sostenida por el agua que llena los poros. Pero a medida que pasa el tiempo, el agua es desalojada de los poros y la matriz cede y se comprime hasta que se alcanza eventualmente un equilibrio en el cual es sostenida exclusivamente por la matriz mineral.

El fenómeno es análogo al de un pistón que comprime un cilindro lleno de fluido y con un resorte en el interior (Fig. 11). El pistón tiene un pequeño orificio A, que permite que el fluido escape. Aquí el resorte juega el rol de la matriz mineral y el orificio simula la baja permeabilidad de la arcilla. El problema es también equivalente al de la carga de un circuito RC.

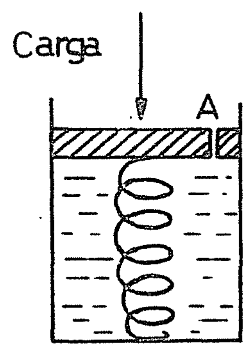

Fig. 11

Un fenómeno relacionado con la consolidación es el de la subsidencia, esto es el hundimiento del terreno cuando se extrae un exceso de agua del subsuelo. Ejemplos de estos procesos ocurrieron en la Ciudad de México y en Santa Clara (California, U.S.A.).

Nos interesa aquí estimar la escala temporal del proceso de consolidación, y la magnitud de los desplazamientos. Los cálculos detallados son extremadamente complicados, pero el uso de modelos simples y el análisis dimensional permiten captar los aspectos esenciales y hacer muy fácilmente algunas estimaciones groseras.

El modelo reológico más simple que permite describir procesos de relajación de este tipo es el del sólido de Kelvin. En un sólido de

Kelvin la relación entre la deformación:

$$u = \frac{\delta V}{V}$$

(V indica el volumen), su derivada temporal $\dot{u}$, y el esfuerzo f (la presión de la carga) es:

$$\dot{u} = \frac{(f - ku)}{B}$$

donde k indica el módulo de compresión y B es un parámetro constante. De acuerdo con este modelo, si en t = 0 se aplica la carga, la compresión tiende a un valor final constante:

$$u_\infty = \frac{f}{k}$$

en un tiempo característico:

$$t^* = \frac{B}{k}$$

en nuestro caso B estará relacionado con la resistencia a la deformación debida al agua que ocupa los poros.

Para determinar B, observemos que:

$$[k] = mt^{-2}l^{-1} \quad ;$$

$$[B] = mt^{-1}l^{-1}$$

Por otra parte, B debe depender de la viscosidad del agua (mayor B a mayor viscosidad) y de la permeabilidad del suelo (menor B a mayor permeabilidad). El coeficiente de viscosidad del agua es:

$$\mu \quad ; \quad [\mu] = mt^{-1}l^{-1}$$

En cuanto a la permeabilidad, es un parámetro de un medio poroso que da una medida de la cantidad y tamaño de los pasajes a través de los cuales pueden escapar el agua. Si con e indicamos la porosidad (definida como el cociente entre el volumen de los poros y el volumen total)

$$e = \frac{V_{poros}}{V}$$

y con r indicamos el radio promedio de los pasajes, la permeabilidad K estará dada por:

$$K = er^2 \quad ; \quad [K] = l^2$$

En la práctica, K se determina experimentalmente. Es evidente entonces por razones dimensionales que debemos tener:

$$B \approx \mu \frac{L^2}{K}$$

donde L representa una longitud característica del problema. En el caso considerado, L será la dimensión lineal típica de la estructura. Resulta entonces:

$$t^* \approx \mu \frac{L^2}{kK}$$

Obsérvese que t^* no depende de la magnitud de la carga, pero sí de su tamaño.

Para tener una idea de las escalas de tiempo de este tipo de procesos, consideremos un caso típico de un suelo arcilloso:

$$k \approx 5 \times 10^7 \quad \text{c.g.s.} \quad ;$$

$$K \approx 10^{-12} \quad \text{c.g.s.}$$

y la longitud de un edificio típico:

$$L \approx 10\text{m} = 10^3 \quad \text{c.g.s.}$$

Luego,

$$t^* \approx 2 \times 10^8 \text{ seg} \approx 6 \text{ años.}$$

Para completar el ejemplo vamos a estimar el desplazamiento debido a la consolidación. Al final del proceso tenemos que:

$$u_\infty = \frac{f}{k}$$

pero a menos de factores del orden de la unidad:

$$u = \frac{\delta V}{V} \approx \frac{\delta L}{L}$$

Si W es el peso de la construcción,

$$f \approx \frac{W}{L^2}$$

Luego

$$\delta L \approx \frac{W}{Lk}$$

Por consiguiente δL escala como el peso por unidad de longitud de la pared.

c) El movimiento de un cuerpo en el seno de un fluido.

Este es un problema importantísimo por sus numerosas aplicaciones a la ingeniería y a las ciencias naturales.

Consideremos movimiento uniforme con velocidad v en un fluido incompresible (v mucho menor que la velocidad del sonido en un fluido). Supondremos que la forma del cuerpo no cambia, de modo que quedará completamente especificada dando l, la longitud característica del cuerpo, y un conjunto de invariantes de escala que agruparemos en un factor de forma f (a su vez un invariante). El movimiento queda completamente especificado si se conocen además, la velocidad v y los ángulos que especifican la orientación del cuerpo respecto de v, que indicaremos colectivamente con α.

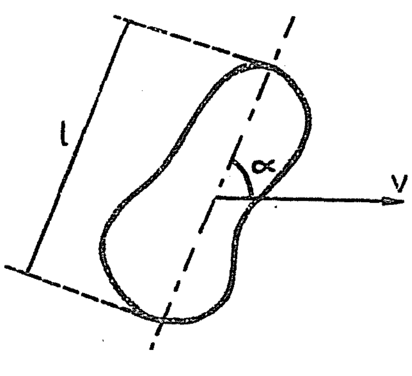

Fig. 12

Tomaremos en cuenta además la inercia del fluido, determinada por su densidad ρ, y la viscosidad del mismo, dada por el coeficiente correspondiente, μ. Para simplificar vamos a suponer que no hay fuerzas de volumen (como por ejemplo el peso) aplicadas al cuerpo.

En consecuencia, el movimiento del fluido para un cuerpo de forma dada (f=constante) queda definido por los siguientes parámetros:

$$l,\ v,\ \alpha,\ \rho,\ \mu$$

Nos interesa conocer la fuerza F ejercida por el fluido sobre el cuerpo (que se suele llamar arrastre total). Resulta claro que la relación:

$$\frac{F}{\rho l^2 v^2}$$

debe ser un invariante. Este invariante debe ser una función de los otros invariantes del problema, a saber: α y el número de Reynolds:

$$R = \frac{\rho v l}{\mu}$$

Por ende:

$$F = \rho l^2 v^2 g(\alpha, R)$$

La determinación de la función g(α,R) es el problema más fundamental de la aerodinámica y la hidrodinámica. ¿Qué nos puede decir al respecto el análisis dimensional?.

Puesto que μ interviene en g sólo a través de R, se pueden sacar algunas conclusiones generales respecto del rol de la viscosidad a partir de la fórmula que da el número de Reynolds. En primer lugar, el efecto de la viscosidad disminuye al crecer R; si se ignora la viscosidad (μ=0) se llega al concepto de un fluido ideal. Luego, en el límite ($R \to \infty$) se debe tener:

$$F = \rho l^2 v^2 g_1(\alpha) \qquad \text{movimiento rápido}$$

En el límite opuesto de un movimiento lento, el efecto de la viscosidad se acrecienta: las fuerzas viscosas dominan sobre la inercia del fluido. Luego, en el límite $R \to 0$, ρ debe desaparecer de la expresión de F; por lo tanto:

$$g \sim \frac{1}{R}$$

Entonces tenemos:

$$F = \mu v l g_2(\alpha) \qquad \text{movimiento lento}$$

Por lo tanto la ley de Stokes es correcta para cuerpos de forma cualquiera si se desprecian los términos de inercia en la ecuación de Navier-Stokes.

Autosimilaridad

Hay un importante clase de fenómenos en que la simetría de escalas conduce a importantes simplificaciones por que permite reducir el número de variables independientes. Esto ocurre debido a que la solución es semejante a sí misma (autosimilar) si las variables se escalan convenientemente. Ilustremos las ideas involucradas por medio de un ejemplo.

La difusión del calor

Supongamos que cierta cantidad de calor, Q, se deposita en el instante t=0 en un pequeño volumen δV de un medio infinito, homogéneo e isótropo. Elegimos el origen de coordenadas dentro de δV. Al pasar el tiempo, el calor difundirá en el medio. Nos interesa encontrar la distribución de temperatura T(r,t) para valores grandes de r y t, de modo que los detalles de la distribución inicial de temperatura dentro de δV son irrelevantes.

Las variable y parámetros del problema serán pues:

$$T, \; r, \; t, \; X$$

$$H = \frac{Q}{\rho c_p}$$

donde X es el coeficiente de difusión térmica y H es el parámetro relacionado con la temperatura media inicial en:

$$\delta V \quad (t_{0,\text{media}} = H/\delta V)$$

Puesto que las dimensiones de todas las variables y parámetros se pueden expresar en términos de las dimensiones fundamentales l, t, θ (temperatura), habrá dos invariantes de escala (combinaciones adimensionales de las variables y parámetros) independientes. Dichas combinaciones se pueden elegir como:

$$\xi = X^{-1} r^2 t^{-1} \,,$$

$$\tau = X^{3/2} H^{-1} t^{3/2} T$$

y obviamente, debemos tener:

$$\tau = f(\xi)$$

Este resultado significa que si escalamos r como $t^{1/2}$ y T como $t^{-3/2}$, la distribución de temperatura tendrá el mismo aspecto en todo instante de tiempo. Dicho de otra manera, si representamos T(r,t) para un t fijo cualquiera, entonces el mismo gráfico representará a T'(r',t') para cualquier otra t' fijo, siempre y cuando cambiemos la escala en el eje r por el factor $(t'/t)^{1/2}$ y la escala en el eje T por el factor $(t'/t)^{-3/2}$ (Fig. 13).

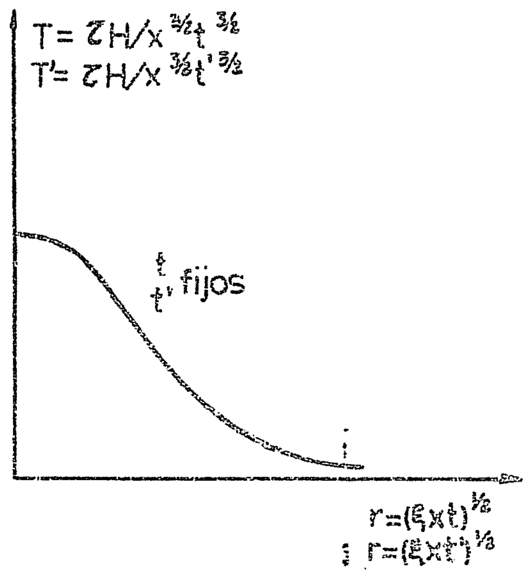

Fig. 13

Esto es lo que se entiende por autosimilaridad: dada la solución en un cierto instante, la solución para otro instante se obtiene de la primera mediante una simple transformación de semejanza (cambio de escala).

Para determinar la solución es preciso calcular f. Esto, por supuesto no se logra mediante el solo análisis dimensional. Hace falta resolver la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T$$

sujeta a las adecuadas condiciones iniciales y de contorno. Nótese que esto no se puede hacer en forma exacta en el presente caso puesto que no se ha especificado suficientemente la distribución inicial de temperatura. Sin embargo, si δV es pequeño y si solo nos interesa la solución para r,t grandes, podemos suponer T=T(r,t) y resolver la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r}$$

Tenemos que resolver entonces la ecuación en las derivadas parciales, lo cual sigue siendo un problema complicado. Aquí es donde nos ayuda la autosimilaridad: ésta nos dice que la solución $f(\xi)$ depende de r y t solamente a través de la combinación:

$$\xi = \frac{r^2}{\chi t}$$

Gracias a este echo se logra una gran simplificación puesto que en realidad solo tenemos que resolver una ecuación diferencial ordinaria en la única variable independiente ξ (que se denomina la variable de autosimilaridad). Sustituyendo en la ecuación de difusión del calor, se encuentra que f satisface la siguiente ecuación:

$$2\xi(4f'+f)' + 3(4f'+f) = 0$$

donde la primera significa derivada con respecto a ξ. Aquí, para que la solución tienda a cero al infinito debemos tener:

$$4f' + f = 0$$

y entonces se encuentra la solución:

$$f = ce^{-\xi/4} \qquad c = \text{constante}$$

y se obtiene finalmente:

$$T(r,t) = \frac{cH}{(\chi t)^{3/2}} e^{-r^2/4\chi t} \qquad (c=\pi^{-3/2})$$

Obsérvese que independientemente de los detalles de la distribución inicial de temperatura, se tiene siempre asintóticamente (r,t grandes) a una solución autosimilar. Muchos problemas comparten esta propiedad, esto es, tienden asintóticamente a la autosimilaridad, cuando los detalles de las condiciones iniciales se pueden ignorar porque han dejado de ser relevantes.

El presente ejemplo pone en evidencia las características básicas de la autosimilaridad. En la dinámica de gases, la mecánica de fluidos, la física de ondas y varios otros campos de la física se presentan numerosos ejemplos de problemas autosimilares.

Comentarios Finales

La simetría de escala, el análisis dimensional y las propiedades de semejanza que de ellos derivan son importantes en cálculos, experimentos y aplicaciones. El análisis dimensional, complementado por una adecuada intuición de la física de los fenómenos permite obtener respuestas aproximadas, sencilla y rápidamente en muchas situaciones de interés práctico. En realidad, en muchos problemas en que solo se requieren soluciones cualitativas o estimaciones de orden de magnitud, los resultados del análisis dimensional pueden ser suficientes, y se obtienen con un mínimo de esfuerzo. Por cierto que en muchos casos estos son los únicos resultados que podemos esperar conseguir, debido a las enormes complicaciones matemáticas del problema, o a nuestro incompleto conocimiento.

Los métodos del análisis dimensional son extremadamente simples y de carácter elemental.

Considerando todas estas razones es en realidad sorprendente encontrar que generalmente se hace muy poco uso de ello en la enseñanza de la física, y particularmente en los cursos elementales.

Somos muy favorables al empleo frecuente de argumentos dimensionales en clase, pues permiten simplificar la matemática, reemplazan ventajosamente muchos cálculos engorrosos y largas deducciones formales, enfocan directamente la atención sobre los aspectos físicos del asunto, acostumbran a los estudiantes a ejercitar la intuición física, a usar el sentido común y a reconocer los aspectos significativos de un problema, descartando lo menos relevante, y los ayuda a desarrollar una actitud mental crítica. En breve, permiten comprender mejor la física y adquirir la habilidad y la confianza que se necesitan para aplicar los conocimientos de la física y formular modelos para resolver problemas concretos.

Además, empleando argumentos dimensionales y de similaridad se pueden introducir y discutir a un nivel elemental y fácilmente accesible para los estudiantes, distintos tópicos avanzados. De otra manera, sería imposible presentar tales temas aunque fuera muy deseable incluirlos en los programas. Este puede ser el caso de varios temas de la física moderna.

La experiencia de uno de los autores (J.G.) indica que los beneficios señalados se pueden obtener en la práctica.

Bibliografía sugerida

Presentaciones elementales o generales de las ideas del análisis dimensional, el teorema Pi, etc. Se pueden encontrar en buenas enciclopedias y numerosos textos de Física General y de Mecánica de los Fluidos; a modo de ejemplo, podemos citar:

la voz "Dimensional Analysis" en la Encyclopaedia Britannica,

"Cours de Physique Générale", G. Bruhat, Masson & Cie., Paris, 1963.

"Física para Ciencias de la Vida", D. Jou, J. E. Llebot, C. Pérez García, Mc Graw-Hill, 1986.

"Principles of Fluid Mechanics", W. H. Li, S. H. Lam, Addison Wesley, 1954.

Exposiciones sistemáticas de los métodos del análisis dimensional y la similaridad, y sus aplicaciones a la mecánica, particularmente a la dinámica de los fluidos, se pueden encontrar en las siguientes monografías:

"Similarity and Dimensional Methods in Mechanics", L. I. Sedov, Academic Press, 1959.

"Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics", G. I. Berenblatt, Consultans Bureau, 1979.

"Handbook of Fluid Dynamics", V. Streeter ed., Mc. Graw-Hill, 1961.

Para el estudio de procesos autosimilares en la dinámica de gases puede verse también:

"Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena", Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, Academic Press, 1967.

Numerosos ejemplos de la aplicación de consideraciones dimensionales para realizar estimaciones sencillas se pueden encontrar dispersas en la literatura; en particular recomendamos consultar:

"Lectures in Physics", R. Feymann.

"Física para Ciencias de la Vida", ya citado arriba.

"Propiedades de la Materia", B. H. Flowers, E. Mendoza, Limusa, 1979.

Sugerimos asimismo consultar la serie de artículos recientes titulados:

"In Search of Simplicity", V. Weisskopf, aparecidos en la revista American Journal of Phisics.