REVISTA DE LA ENSEÑANZA DE LA FISICA - Vol.3 Nº 1 (1990)

OSCILADORES ARMONICOS SORPRENDENTES

JORGE B. SZTRAJMAN

Grupo de Teorías Cuánticas Relativistas y Gravitación. Instituto de Astronomía y Física de Espacio, C. C. 67, Suc. 28, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires

Dirección postal: Proyecto PROCIENCIA (FISICA) CONICET, Callao 930, 1023 Buenos Aires, Argentina

Los movimientos oscilatorios armónicos a los que hacemos referencia comúnmente (péndulo, resorte, etc.) tienen una frecuencia que es propia del sistema, mientras la amplitud y fase inicial varían de acuerdo a las condiciones iniciales del movimiento. Sin embargo, existen osciladores armónicos en que esto no es así.

¿Qué es un movimiento oscilatorio armónico?

Una buena manera de introducir el concepto de movimiento oscilatorio armónico (M.O.A.) sin recurrir al cálculo diferencial consiste en imaginarlo con la proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro cualquiera de la circunferencia[1].

$\vec{v}$: velocidad
$\vec{a}$: aceleración
A: radio

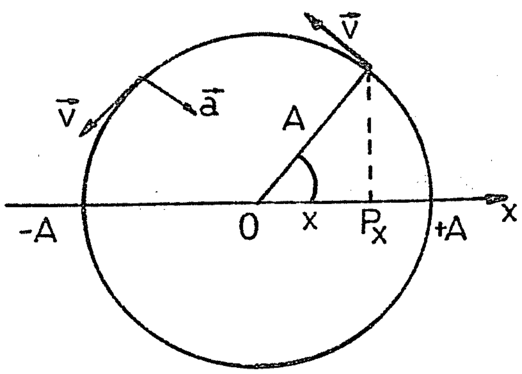

Fig. 1. Cuando el punto P realiza un movimiento circular uniforme, su proyección P_x se mueve con MOA entre +A y -A.

De la Fig. 1 se puede ver por simple proyección de los vectores que:

$$x = A \cos \alpha$$

$$v_x = -|\vec{v}| \text{ sen } \alpha$$

$$a_x = -|\vec{a}| \cos \alpha$$

y sabemos que en el movimiento circular uniforme valen las siguentes relaciones:

$$\alpha(t) = \omega t + \alpha_0$$

$$|\vec{v}| = \omega A$$

$$|\vec{a}| = \omega^2 A$$

donde las dos últimas relaciones valen siempre que la velocidad angular esté expresada en radianes/unidad de tiempo.

Ahora conviene olvidar el artículo del movimiento circular y quedarnos sólo con las expresiones finales (omitimos entonces los subíndices x):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha_0) \qquad (1)$$

$$v(t) = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \alpha_0) \qquad (2)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha_0) \qquad (3)$$

Entonces, un MOA es aquél en que la posición x en función del tiempo está dada por la Ec. (1); además la velocidad y aceleración son dadas por (2) y (3). Un vistazo a estas expresiones muestra que un MOA queda determinado si damos los valores de tres valores fijos o parámetros: A (amplitud), ω (pulsación) y α_0 (fase inicial). A nivel puramente cinemático estos tres parámetros tienen igual importancia para determinar el movimiento, sin embargo la consideración de elementos dinámicos cambiará radicalmente esta situación.

Los parámetros no son todos iguales

Ahora nos proponemos algo más ambicioso que la simple descripción cinemática del MOA. Queremos averiguar qué sistemas físicos pueden realizar este movimiento. Si, si, claro, ya sabemos que la respuesta es: un péndulo simple, una masa unida a un resorte, etc., pero ... nos llevaremos más de una sorpresa. Eso si el precio que habrá que pagar por tan emosionante evento es padecer un estudio algo minusioso del asunto.

Desde el punto de vista de la dinámica de los sistemas físicos, los parámetros A, ω y α_0 tienen diferentes status. Por ejemplo, cuando hacemos oscilar un péndulo a partir de diferentes amplitudes, ω es siempre la misma (está bien, de acuerdo, dentro de un rango de pequeñas amplitudes); sin embargo, A y α_0 dependen de la manera concreta como se haya preparado la oscilación, esto es, las condiciones iniciales de posición y velocidad. Decimos entonces, con toda justicia que en el caso del péndulo A y α_0 son parámetros *iniciales* (dependen de las condiciones iniciales), mientras que ω es un parámetro *característico* (no depende de las condiciones iniciales) del sistema. Por su puesto ni los parámetros iniciales ni el característico dependen del tiempo, son todos constantes.

Una manera de reconocer cuál es el parámetro característico es que es el único que aparece en la llamada ecuación de movimiento, que es la que se obtiene de aplicar al sistema la Segunda Ley de Newton. Esta ecuación no es otra cosa que obtener la aceleración en términos de la posición y de la velocidad.

El oscilador armónico tradicional

Este es el caso que todos conocemos desde la más tierna infancia y cuyo representante más familiar es, digamos, el péndulo simple. En este caso, como ya dijimos, el rol de parámetro característico es desempeñado por ω La tarea de obtener la ecuación de movimiento no es otra que la de tomar las Ec.(1), (2) y (3) y deshacernos de los parámetros iniciales A y α_0. Esto es muy sencillo si inspeccionamos las Ec.(1) y (3) y sale:

$$a = -\omega^2 x \qquad (4)$$

que es lo que sabíamos de toda la vida: la aceleración es proporcional a la elongación y con el signo contrario (de ahí que el movimiento se encuentre limitado a una región limitada del espacio). Otro hecho saliente de la Ec.(4) es que la aceleración depende de x pero no de la velocidad.

En cuanto a ω, en cada caso particular estará relacionada con ciertas propiedades del sistema. Por ejemplo, para el péndulo: $\omega=\sqrt{g/L}$ con g = aceleración de la gravedad y L longitud de la cuerda, para una masa m unida a un resorte de constante elástica K, $\omega = \sqrt{K/m}$, etc. Por otra parte, las constantes A y α_0 pueden determinarse dando las condiciones iniciales del movimiento (posición y velocidad a un tiempo arbitrario, usualmente t = 0).

Otra clase de oscilador armónico, la familia crece.

En el caso anterior el sistema oscilaba con el mismo ω cualquiera fuera la condición inicial. Desde el punto de vista matemático, lo que sucede es que ω aparece en la ecuación de movimiento (4) y no puede ser manipulada "desde afuera", cosa que no ocurre con A y α_0. Ahora, podemos concebir un sistema físico que oscile con la misma amplitud con independencia de las condiciones iniciales. En otras palabras, que el parámetro A sea característico y ω y α_0 sean iniciales.

La primera cosa que podemos preguntarnos respecto de tal dispositivo es cuál es su ecuación de movimiento, y esto se logra echando por la borda a los parámetros iniciales ω y α_0 en las Ec.(1), (2), (3). Es penoso comprobar que esto no es tan sencillo como en el caso previo. No obstante, saldremos airosos mediante un paso intermedio que consiste en despejar el coseno de la Ec.(1) y el seno de la Ec.(2), elevar ambas expresiones al cuadrado y sumarlas (recordando que $\mathrm{sen}^2 + \cos^2 = 1$, según Pitágoras). Después de un reordenamiento trivial sale:

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 \qquad (5)$$

donde el lector sagaz reconocerá, previa multiplicación por m/2, a la vieja ecuación de conservación de la energía. Ahora ^{2} puede ser despejada como:

$$\omega^2 = v^2/(A^2 - x^2) \qquad (6)$$

Y poniendo éste valor de [illegible] en la Ec.(4) obtendremos la tan deseada ecuación del movimiento:

$$a = -x\ v^2/(A^2-x^2) \qquad (7)$$

donde el único parámetro que aparece es A, como queríamos.

Nótese que ahora la aseleración no depende sólo de la posición sino también de la velocidad. La pulsación y fase iniciál serán dependientes de las condiciones iniciales del movimiento.

A esta altura Ud. tendrá, posiblemente, alguna de las siguientes opiniones sobre este asunto:

1.- Bah, son sólo matemáticas, muestrenme algo que se mueva así y lo creeré.
2.- No entendí un pepino de toda esa historia del parámetro característico.
3.- ¡Qué interesante! Lo comprendí casi todo, salvo eso del MOA.
4.- ¿Esto hay que saberlo?.

Bien, si su opinión coincide con alguna de las dos primeras, trataremos de satisfacer su curiosidad mostrándole un sencillo dispositivo mecánico que oscila con amplitud independiente de las condiciones iniciales (no vale pensar en una bolita oscilando entre el piso y el techo porque tal oscilación *no es armónica*). Si en cambio, su opinión se asemeja a alguna de las dos últimas, pues no cabe duda que existen infinidad de tareas que le resultarán mas provechosas que continuar con la lectura de este artículo.

El oscilador armónico de amplitud característica existe y goza de buena salud

Ya que lo prometimos no tenemos más remedio que presentar un ejemplo de oscilador armónico en el que la amplitud A es el parámetro característico.

Se trata de dos pequeñas bolitas de masa m que pueden moverse sobre ejes ortogonales entre sí con la única restricción de estar unidas por medio de una barra rígida de masa despreciable.

Tal sistema se ilustra en la Fig. 2. Dos cuerpos de masa m unidos por una barra rígida de peso despreciable y longitud A. Cada masa puede moverse por uno solo de los ejes.

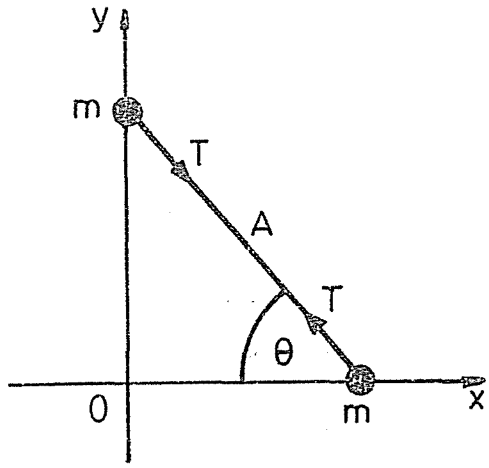

Fig. 2.

La aplicación de la Segunda Ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) para ambas bolitas da las siguientes dos ecuaciones:

$$-\ T \operatorname{sen} \Theta = ma_y \qquad (8)$$

$$-\ T \cos \Theta = ma_x \qquad (9)$$

donde T es la fuerza de vínculo debida a la barra y a_y y a_x las correspondientes aceleraciones de la bolitas.

Dividiendo miembro a miembro las Ec.(8) y (9) obtenemos:

$$a_y = y\ a_x/b \qquad (10)$$

por otra parte, la existencia de una barra hace que las coordenadas x e y estén relacionadas por el Torema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = A^2 \qquad (11)$$

Derivando con respecto al tiempo la Ec.(11) tenemos que:

$$xv_x + yv_y = 0 \qquad (12)$$

y derivando de nuevo con respecto al tiempo, sale que:

$$v_x + xa_x + v_y + ya_y = 0 \qquad (13)$$

Ahora siga la siguiente receta: despeje v_y de

(12) e introduzca es expresión en (13) junto con la expresión para a_y dada por (10). Una vez hecho esto despeje a_y, habida cuenta de (11). Al final, Ud. será el feliz propietario de la siguiente fórmula:

$$a_x = -xv^2/(A^2-x^2) \qquad (14)$$

es decir, ni más ni menos que la ecuación del movimiento, que coincide con la Ec. (7). Queda probado, pues, que este sistema realiza una oscilación armónica con amplitud independiente de las condiciones iniciales.

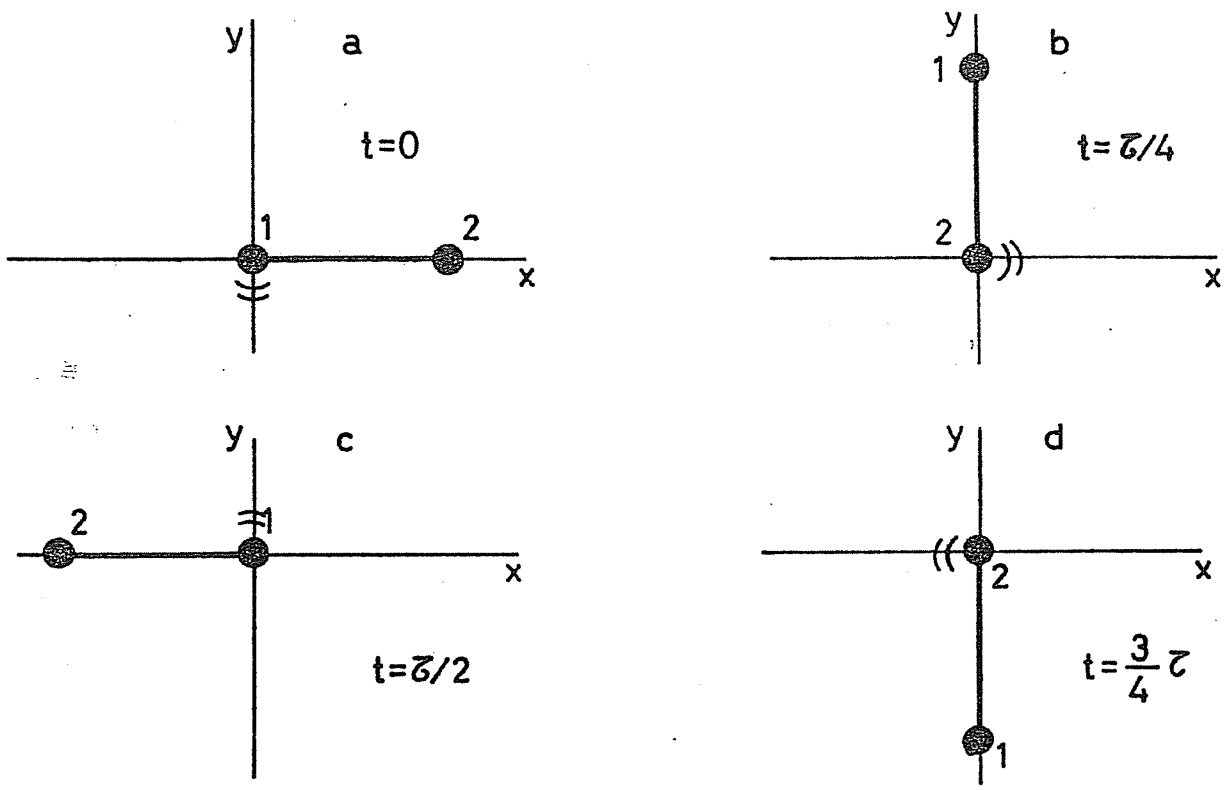

Fig. 3.

Se presentan cuatro estados del sistema correspondientes a un periodo (τ) del movimiento; 1 se mueve en el eje y, mientras 2 lo hace en el eje x, (a) 1 se mueve hacia arriba y 2 está en reposo, (b) 1 está en reposo y 2 se mueve hacia la izquierda, (c) 1 se mueve hacia abajo y 2 está en reposo, (d) 1 está en reposo y 2 se mueve hacia la derecha.

Referencias

Puede verse, por ejemplo, "P.S.S.C., Física, parte III, Ed. Reverté, Segunda Edición, 1966, Pág. 26" o "H. E. White, Física Moderna, Vol. I, Editorial Montaner y Simón, Barcelona, 1979, Pág. 325".

Agradecimientos

Quiero agradecer a Agustín Rela, quién proporcionó la idea que dió origen a este trabajo.