

# Análisis del tratamiento dado a los rayos paraxiales en libros de texto universitarios

Analysis of the treatment given to paraxial rays in university textbooks

REVISTA  
DE  
ENSEÑANZA  
DE LA  
FÍSICA

Norah Giacosa, Claudia Zang, Ramiro Galeano, Jorge Maidana y Alejandro Such

Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Misiones. Félix de Azara 1552, CP 3300, Posadas, Misiones. Argentina.

E-mail: norahgiacosa@gmail.com

## Resumen

En este trabajo, se muestran resultados de un estudio descriptivo de casos múltiples. Se analizó el tratamiento dado a los rayos paraxiales en doce libros de texto (LT) universitarios de uso frecuente en Argentina. Las variables que definen a los rayos paraxiales son: ángulo pequeño, rayos cercanos y tamaño del espejo. Se demuestra que la proposición rayos cercanos es más general que la expresión ángulos pequeños para referirse a dichos rayos. Se encontró un solo ejemplar donde se indica explícitamente que un ángulo es pequeño si es mucho menor que un radián. De igual manera, en un solo LT se especifica que rayos cercanos al eje son los que inciden de manera tal que la distancia entre el punto de incidencia y el eje óptico es despreciable frente al valor del radio de curvatura. En tres ejemplares se señala que el tamaño del espejo se considera pequeño si su abertura es menor que la distancia focal o menor al radio de curvatura del espejo esférico.

**Palabras clave:** Rayos paraxiales; Libros de texto; Física; Universidad.

## Abstract

In this work, the results of a multiple case descriptive study are shown. The treatment given to paraxial rays was analysed in twelve frequently used university textbooks (TB) in Argentina. The variables that define paraxial rays are: small angle, close rays and mirror size. It is shown that close rays proposition is more general than small angles expression to refer to such rays. A single copy was found where it is explicitly stated that an angle is small if it is much smaller than a radian. Likewise, in a single TB it is specified that rays close to the axis are those that strike in such a way that the distance between the point of incidence and the optical axis is negligible compared to the value of the radius of curvature. In three copies, it is indicated that the size of the mirror is considered small if its opening is smaller than the focal distance or smaller than the radius of curvature of the spherical mirror.

**Keywords:** Paraxial rays; Textbooks; Physics; University.

## I. INTRODUCCIÓN

La Historia de la física muestra que el proceso de construcción de un sistema coherente para explicar la naturaleza de la luz y el proceso de visión ha sido controvertido. Los cambios de paradigma, entre ellos los asociados a la transición entre la óptica geométrica y la óptica ondulatoria no siempre son evidentes en los libros de texto (LT) de Física universitaria básica (Pesa y Cudmani, 1993; Bravo y Pesa, 2015).

La Sociedad Americana de Óptica sostiene que la óptica geométrica debería llamarse óptica de rayos, pues se ocupa de los rayos de luz, una entidad que no existe (Bass, 1995). Afirma que es habitual comenzar su estudio intentando justificar teóricamente el uso de rayo, cuando la verdadera justificación radica en que el rayo, al igual que otros modelos exitosos de Física, es indispensable para el pensamiento humano. El modelo de rayo, pese a sus defectos y limitaciones, funciona bien en algunos casos y en otros es insuficiente, dependiendo de la clase de fenómenos que se pretendan abordar. Asimismo, indica que las definiciones que se elaboraron empleando la teoría corpuscular y la teoría ondulatoria son imperfectas, pues cada una proporciona una idea del comportamiento de la luz, pero no la describe completamente. La elaboración de una definición satisfactoria parece ser un problema asociado con el principio de incerti-

dumbre, ya que lo que realmente se quiere de un rayo es una especificación de posición y dirección, que es imposible en virtud de las propiedades de las ondas clásicas y el comportamiento cuántico.

Un enfoque que evitaría las dificultades de una definición física, según sostiene la Sociedad, es el de tratar los rayos como entidades matemáticas. A partir de definiciones y postulados, se pueden encontrar una variedad de resultados, que pueden ser más o menos útiles y válidos para la luz. Incluso con este enfoque, es virtualmente imposible pensar de manera puramente geométrica, a menos que los rayos sean tratados como objetos de geometría, en lugar de la óptica. De hecho, a menudo se cambia entre pensamiento de rayo y pensamiento de onda sin notarlo, por ejemplo, al considerar que el índice de refracción depende, entre otras cuestiones, de la longitud de onda. La Sociedad reconoce que la separación rígida de la óptica geométrica y física dificulta la comprensión de los fenómenos, por lo cual aconseja no excluir completamente la teoría ondulatoria en el enfoque geométrico.

Por otro lado, el modelo de rayo paraxial se utiliza en los libros de texto (LT) universitarios básicos de Física para deducir las ecuaciones que describen los fenómenos de reflexión y refracción en superficies esféricas. También se emplea para el trazado de diagramas, la localización y magnificación de la imagen, etc. Pese al uso intensivo que se hace de él; Medina y Velazco (2018) alertan que en esos libros la definición de *rayos paraxiales* -basada en variables “ángulo pequeño” o “rayos cercanos al eje óptico”- carece de claridad y precisión.

## II. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El fenómeno de reflexión en superficies esféricas suele abordarse en los libros de Física universitaria básica, presentando esquemas semejantes al que se muestra en la figura 1.

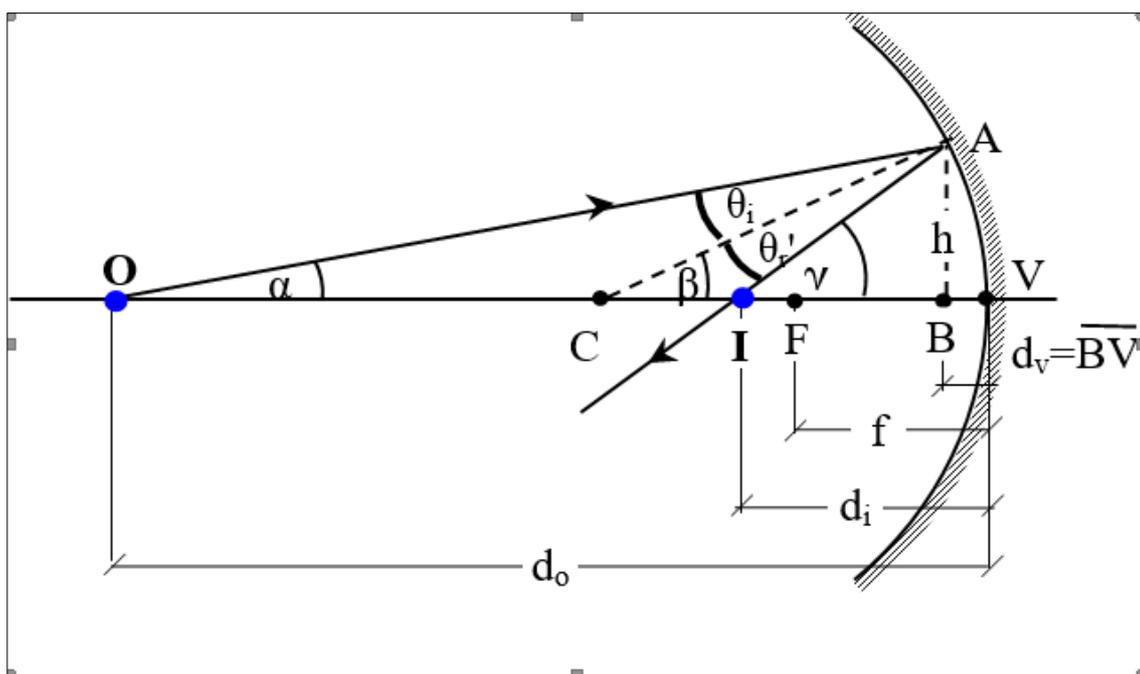


FIGURA 1. Reflexión en un espejo cóncavo ( $d_o > r$ ).

Las ecuaciones (1) y (2) que se suelen definir a partir de él son:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

$$f = \frac{r}{2} \quad (2)$$

Donde  $d_o$  es la distancia objeto,  $d_i$  la distancia imagen,  $r$  el radio de curvatura del espejo y  $f$  la distancia focal. Asimismo,  $\alpha$  es el ángulo entre el rayo incidente y el eje óptico,  $\beta$  es el ángulo entre el radio de curvatura del espejo y el eje óptico; y  $\gamma$  es el ángulo entre el rayo reflejado y el eje óptico.

La intención de esta comunicación es, por un lado, demostrar que la proposición rayos cercanos es más general que la expresión ángulos pequeños para referirse a los rayos paraxiales. Por otro, analizar el tratamiento dado a los rayos paraxiales en los LT que se usan frecuentemente en el ciclo básico y determinar si se explicita cuán pequeño es el ángulo y cuán cercanos son los rayos paraxiales.

### III. MARCO TEÓRICO

El modelo de rayo paraxial, según Medina y Velazco (2018), se construye sobre la base de dos supuestos: 1º) las superficies son esféricas; y 2º) los rayos son paraxiales. El primero de ellos implica aceptar que el radio de curvatura de la superficie esférica es igual en todos los puntos de la superficie. El segundo, según sostienen, se suele definir en los LT como los rayos que forman *ángulos pequeños* con el eje óptico o como *rayos cercanos* al eje óptico. Afirman que estas definiciones no son equivalentes; pese a ello, se pueden encontrar ambas conceptualizaciones en diferentes secciones de un mismo ejemplar.

Por otro lado, opinan que los adjetivos “pequeño” y “cercano” en el ámbito de física tienen sentido solamente cuando se compara con alguna otra magnitud; y estiman que es difícil que un estudiante que aborda por primera vez el tema deduzca por sí mismo que “ángulo pequeño” significa  $\alpha \ll 1 \text{ rad}$  y “rayo cercano” representa  $h \ll r$  o bien  $\beta \ll 1 \text{ rad}$ .

En la discusión relacionada con la aproximación paraxial, estos autores, resaltan la simplicidad de las ecuaciones del modelo; las cuales son independientes de las variables angulares. No obstante; dichas aproximaciones acarrearán dos problemas; uno de índole matemático y otro conceptual y de lógica. El primero se hace evidente cuando se omite cuantificar la falta de precisión, es decir especificar los errores sistemáticos que se introducen al sustituir los valores de los ángulos -medidos en radianes- por los valores de las funciones trigonométricas. Según ellos, si los ángulos son mucho menores que un radián, el error sistemático que se introduce es pequeño, proviene de truncar las series de McLaurin y si se conserva sólo el primer término, se obtiene la aproximación paraxial, también denominada gaussiana o de primer orden. El segundo problema, se manifiesta al inferir equivocadamente que, si  $\alpha$  es pequeño,  $\beta$  y  $\gamma$  también lo serán o que si  $\alpha$  es pequeño también serán pequeños los ángulos de incidencia y reflexión ( $\theta_i$  y  $\theta_r'$ ) o los ángulos incidente y refractado si se tratara del fenómeno de refracción en superficies esféricas. La cuestión conceptual se manifiesta al sostener que ángulo pequeño y rayo cercano son sinónimos. En la sección VI, se analizarán las proposiciones ángulo pequeño y rayos cercanos.

### IV. ANTECEDENTES

Los reportes de investigaciones científicas cuyo objeto de estudio han sido los LT o los fenómenos ópticos son abundantes y variados. Ribeiro y Carneiro (2016) catalogaron 152 artículos, relacionados con el fenómeno de reflexión de la luz, publicados en revistas especializadas de física y enseñanza de la física durante los años 1995 a 2015. Entre las investigaciones centradas en los LT de diferentes niveles educativos que abordan óptica se pueden mencionar los que abordan óptica geométrica (Perales, 1987; Solbes Matarredona y Zacarés García, 1993; Perales, 1995; Castano y Hawkins, 2010; Şengören y Çoban, 2011), óptica física (Bravo y Pesa, 2015), o la transposición didáctica del *Tratado sobre la Luz* de Huygens (Krapas, 2008), entre otros. No se encontraron publicaciones que respondieran a los objetivos planteados en este estudio.

### V. METODOLOGÍA

Se propuso investigar, mediante la técnica análisis de contenido (Bardín, 1996), el tema rayos paraxiales en un conjunto de LT de Física de uso frecuente en el ciclo básico universitario. La elección de la muestra intencional se realizó a partir del preanálisis y teniendo en cuenta las reglas de exhaustividad, representatividad, homogeneidad y pertinencia propuestas por Porta y Silva (2003). Los doce ejemplares seleccionados están citados en los Programas Analíticos vigentes en una institución universitaria de gestión estatal, los autores no se reiteran y la edición es la más actual a la que se tuvo acceso. En la Tabla 1 se muestran los LT y el código asignado.

TABLA I. Libros de Texto seleccionados y código asignado.

Código	Libro de texto
T1	Alonso, E. y Finn, E. (1976) <i>Física. Vol. II Campos y ondas</i> . Barcelona. España: Fondo Educativo Interamericano S.A.
T2	Bauer, W. y Westfall, G. (2011) <i>Física para Ingeniería y Ciencias con Física moderna. Volumen 2</i> . 1º Ed. México: McGraw Hill.
T3	Burbano de Ercilla, S.; Burbano García, E. y García Muñoz, C. (2003) <i>Física General</i> . 32º Ed. España: Tébar
T4	Gettys, E.; Keller, F. y Skove, M. (2005) <i>Física para Ciencias e Ingeniería. Tomo II</i> . México: McGraw Hill.
T5	Giancoli, D. (2009) <i>Física para Ciencias e Ingeniería con Física moderna. Volumen II</i> . 4ta Ed. México: Pearson Educación
T6	Resnick, R, Halliday, D y Krane, K. (2002). <i>Física. Vol. 2</i> . 5ta. ed. español. México: Compañía Editorial Continental (CECSA).
T7	Rex, A. y Wolfson, R. (2011) <i>Fundamentos de Física</i> . España: Pearson Educación. .
T8	Serway, R. y Jewett, J. (2009) <i>Física para ciencia e ingeniería con Física Moderna. Vol. 2</i> . 7ma. México: Cenage Learning.
T9	Tipens, P. (2011) <i>Física, conceptos y aplicaciones</i> . 7º Ed. Perú: McGraw Hill.
T10	Tipler, P. (1993) <i>Física. Tomo 2</i> . 3ra Ed. España: Editorial Reverté S.A.
T11	Wilson, J.; Bufa, A. y Lou, B. (2007) <i>Física</i> . 6º Ed. México: Pearson Educación.
T12	Young, H. y Freedman, R. (2009) <i>Física universitaria con Física Moderna. Vol.2</i> . 12º Ed. México: Pearson Educación.

Las unidades de análisis fueron los capítulos o secciones dedicados a óptica geométrica. Las categorías empleadas para analizar el sistema lingüístico fueron: *ángulo pequeño*, *rayos cercanos* y *tamaño del espejo*. En el sistema simbólico se examinó si se explicitan las *aproximaciones* realizadas. El material fue codificado por dos grupos distintos de investigadores; posteriormente se delimitaron las concordancias o diferencias; y se elaboraron los resultados que se discuten en la sección B.

## VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### A. Análisis de las proposiciones “ $\alpha$ es pequeño” y “rayos cercanos”

En la fig. 1 puede verse que  $d_o$  es mayor a  $r$  ( $d_o > r$ ) y que  $d_o$  puede hacerse tan grande como se desee con sólo alejar el objeto ( $d_o \rightarrow \infty$ ), en tanto que  $h$  y  $d_v$  tienen por límite superior el valor de  $r$ . Dado que la  $\text{tg } \alpha = h/(d_o - d_v)$ , si  $d_o$  es suficientemente grande, el ángulo  $\alpha$  puede hacerse pequeño, aunque  $h$  y  $d_v$  no lo sean. A continuación, se analizan las dos posibilidades del tamaño de  $h$ .

a) Si  $h$  tiende al límite superior ( $h \rightarrow r$ ), el  $\text{sen } \beta$  ( $\text{sen } \beta = h/r$ ) tiende a uno,  $\beta$  tiende a valores mayores a un radián ( $\beta \rightarrow \pi/2$ ) y por lo tanto  $\beta$  no es pequeño. Si  $\beta$  no es pequeño, tampoco lo será  $\gamma$  ( $\gamma = \beta + \theta_r'$ ). Con lo cual queda en evidencia que la condición “ $\alpha$  pequeño” es necesaria, pero no suficiente para inferir que  $\beta$  y  $\gamma$  también serán pequeños.

b) Si  $h$  es mucho menor que  $r$  ( $h \rightarrow 0$ ), el  $\text{sen } \beta$  ( $\text{sen } \beta = h/r$ ) tiende a cero,  $\beta$  tiende a valores menores que un radián ( $\beta < 1 \text{ rad}$ ) y por lo tanto  $\beta$  es pequeño. Si  $\beta$  es pequeño, también lo será  $\gamma$  ( $\gamma = \beta + \theta_r'$ ). De donde se infiere que las condiciones “ $\alpha$  pequeño” y “ $h$  es mucho menor que  $r$ ” son suficientes para afirmar que  $\beta$  y  $\gamma$  también serán pequeños.

Si  $d_o$  es igual a  $r$  ( $d_o = r$ ) -como se muestra en la fig. 2 - y se desea que  $\alpha$  sea pequeño ( $\text{tg } \alpha = h/r - d_v$ ), es suficiente que  $h$  sea menor o igual a  $r - d_v$  para que  $\alpha$  sea menor a un radián. Si el rayo incidente es cercano al eje, la distancia desde el punto B al vértice del espejo ( $d_v = BV$ ) es despreciable frente al valor de  $r$  y  $\text{tg } \alpha \approx \text{sen } \alpha$ . En este caso  $\alpha = \beta = \gamma$ , por lo tanto, si  $\alpha$  es pequeño,  $\beta$  y  $\gamma$  también lo serán. De donde se infiere nuevamente que las condiciones “ $\alpha$  pequeño” y “ $h$  es menor a  $r$ ” son suficientes para afirmar que  $\beta$  y  $\gamma$  también serán pequeños.

Por último, si  $d_o$  es menor a  $r$  ( $d_o < r$ ) -como muestra la fig. 3- y se desea que  $\alpha$  sea pequeño entonces  $h$  deberá ser mucho menor a  $r$ ,  $d_v$  tenderá a ser despreciable, la  $\text{tg } \alpha$  ( $\text{tg } \alpha = h/d_o - d_v$ ) tiende a la unidad y el ángulo  $\alpha$  es menor a un radián. En esta situación el ángulo  $\beta$  es menor que  $\alpha$  ( $\alpha = \beta + \theta_r'$ ) y por lo tanto  $\beta$  es pequeño. Si  $\beta$  es pequeño,  $\gamma$  también lo será ( $\beta = \gamma + \theta_r'$ ). Este último razonamiento muestra que si “ $\alpha$  es pequeño” y “ $h$  es mucho menor que  $r$ ” se puede concluir que  $\beta$  y  $\gamma$  también lo serán.

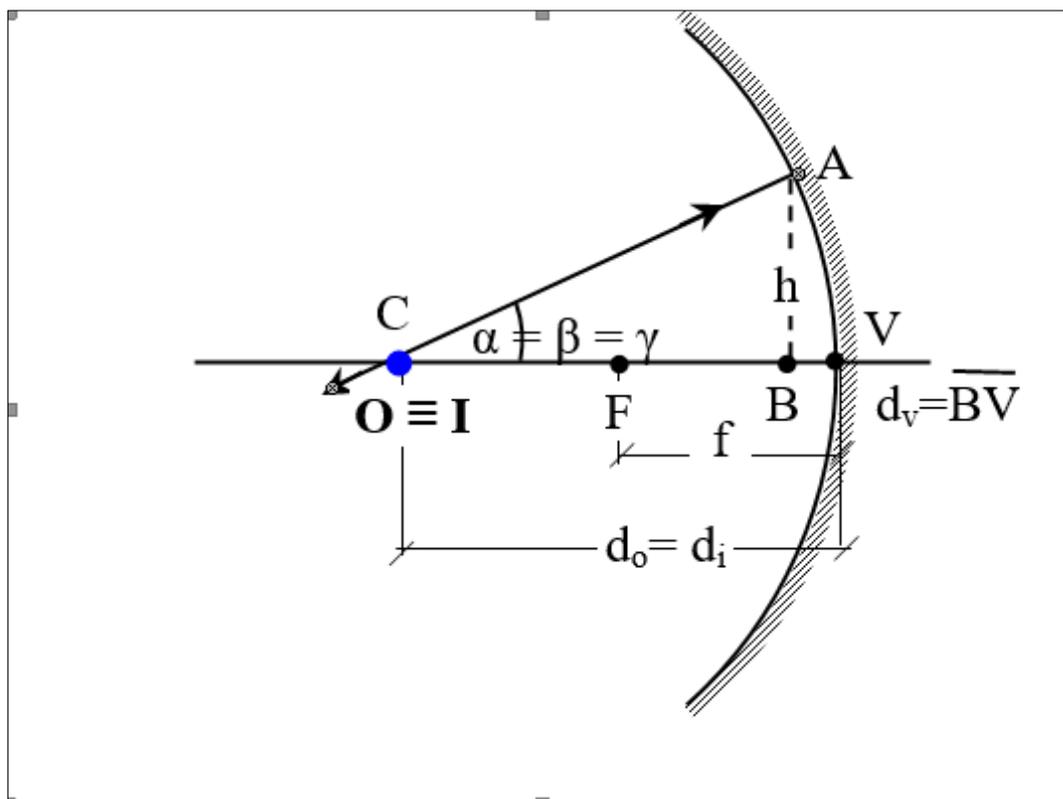


FIGURA 2. Reflexión en un espejo cóncavo ( $d_o = r$ ).

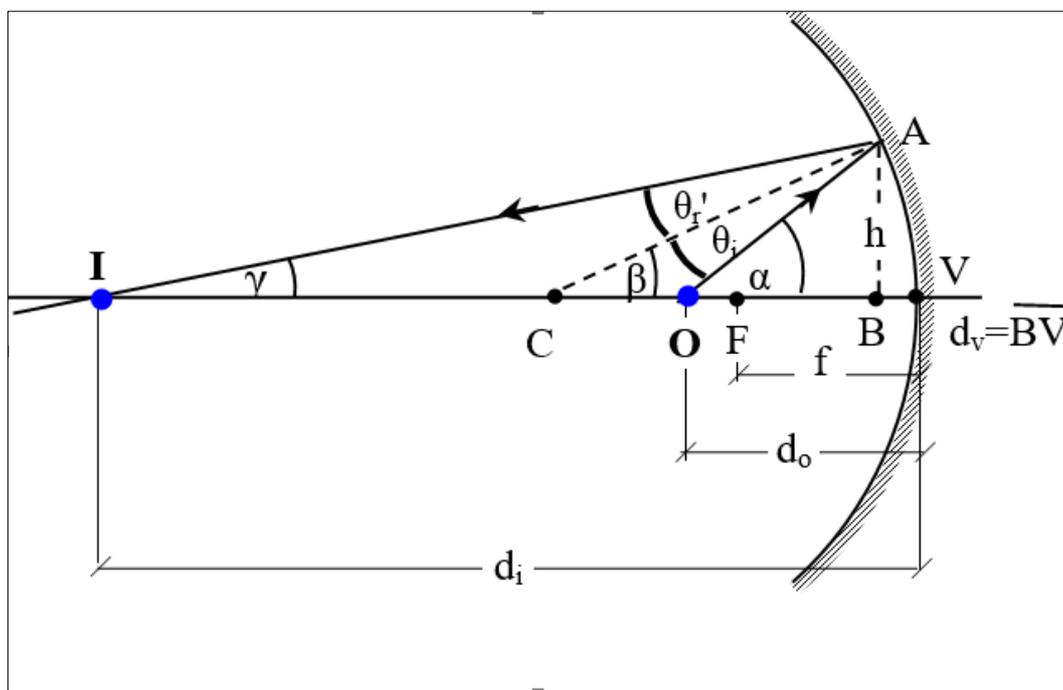


FIGURA 3. Reflexión en un espejo cóncavo ( $d_o < r$ ).

De los párrafos anteriores se infiere que la proposición “ $\alpha$  pequeño entonces  $\beta$  y  $\gamma$  también lo son” puede aplicarse sólo cuando la distancia objeto es igual o inferior al radio del espejo esférico ( $d_o \leq r$ ). Asimismo, se aprecia que la proposición “la distancia  $h$  menor o igual a  $r$ ”, que significa restringir los rayos a los que cumplan con la condición “cerca del eje óptico”, es más general que ángulo  $\alpha$  pequeño, porque es independiente de la distancia objeto.

## B. Análisis de los LT

En la tabla II se muestra una síntesis de las variables mencionadas y el orden de aparición en cada uno de los ejemplares investigados.

**TABLA II.** Variables mencionadas y orden de aparición en cada libro de texto analizado.

LT	Ángulo pequeño		Rayos cercanos		Tamaño del espejo	
	Menciona	Orden	Menciona	Orden	Menciona	Orden
T1	Sí	1°	No	---	Sí	2°
T2	Sí	1°	Sí	2°	No	---
T3	Sí	2°	Sí	1°	No	---
T4	Sí	2°	Sí	1°	No	---
T5	Sí	2°	No	---	Sí	1°
T6	Sí	1°	No	---	Sí	2°
T7	No	---	Sí	1°	Sí	2°
T8	Sí	1°	Sí	2°	No	---
T9	No	---	Sí	2°	Sí	1°
T10	Sí	3°	Sí	1°	Sí	2°
T11	Sí	1°	Sí	2°	No	---
T12	Sí	1°	Sí	2°	No	---

De la tabla II se infiere que la mayoría de los LT (11/12) menciona dos variables sobre las tres identificadas para conceptualizar los rayos paraxiales y una minoría (1/12) recurre a tres de ellas para la misma cuestión.

### B1. Ángulo pequeño

El 90% de los ejemplares que usan la variable ángulo, lo hace en la presentación del tema reflexión en superficies esféricas y el 10% restante en refracción en un dióptrico esférico. En la mayoría de los LT (T1, T4, T6, T8, T10, T12) se indica que los ángulos “pequeños” son los tres que forman el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie con el eje óptico del espejo esférico, respectivamente. En menor cantidad de ejemplares (T2, T5, T11) los ángulos pequeños a los que aluden son el de incidencia y el de reflexión. El único caso donde los ángulos pequeños son los que forman el rayo incidente y el rayo refractado se encuentra en T3.

En los LT que toman los *ángulos pequeños con respecto al eje óptico* se identificaron dos secuencias diferentes para deducir las ecuaciones de los espejos. En una mayoría de los ejemplares (T1, T4, T6, T10, T12) primero se establece la relación entre la distancia objeto, la distancia imagen y el radio de curvatura del espejo (en lo que se sigue se referirá a esta relación como Ecuación 1); y seguidamente el aumento lateral del espejo (se llamará Ecuación 2). En un solo caso, la secuencia tiene un orden inverso (T8).

En la mayoría de los ejemplares (T4, T6, T10) que emplea la primera secuencia, en términos generales, se establece relaciones entre los ángulos internos y externos de triángulos, se definen los ángulos en radianes y se deduce la Ecuación 1. En el resto (T1, T12), se comparan triángulos semejantes, se usan relaciones entre los lados y los ángulos, se aproxima el valor del ángulo medido en radianes al valor de la tangente del ángulo y se presenta la Ecuación 1. En un solo LT se indica explícitamente que: “*La tangente de un ángulo mucho menor que un radián es casi igual al ángulo mismo (medido en radianes), de modo que podemos sustituir  $\tan \alpha$  por  $\alpha$ , y así sucesivamente, en las ecuaciones anteriores. Asimismo, si  $\alpha$  es pequeño, podemos ignorar la distancia  $\delta$  en comparación con  $s'$ ,  $s$  y  $R$ .*” (T12, p.1162). La negrita corresponde a los autores de la investigación (NA) y las aclaraciones de las abreviaturas citadas se muestran en la fig. 4.

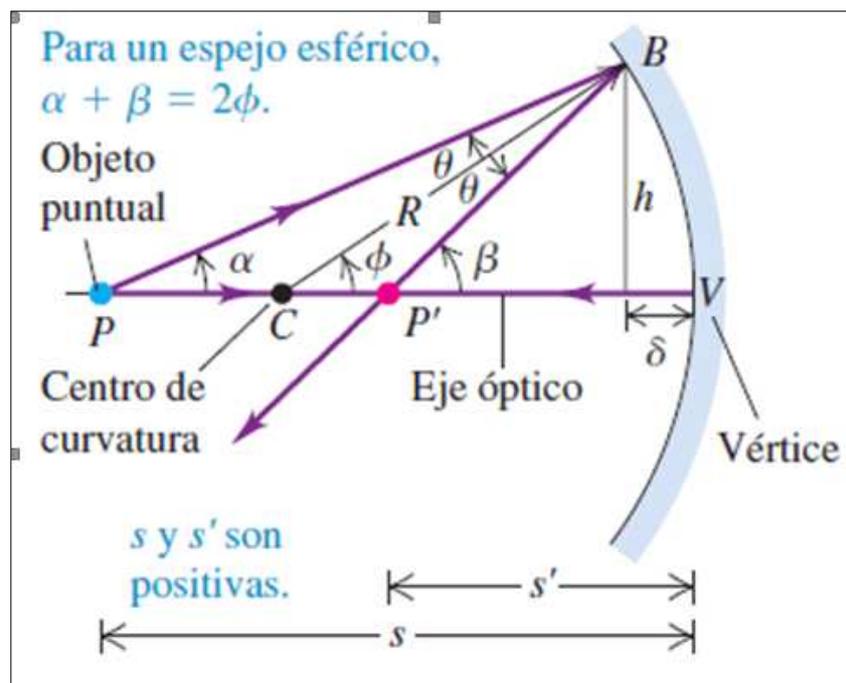


FIGURA 4. 34.10 a) Un espejo esférico cóncavo forma una imagen real de un objeto puntual P que está sobre el eje óptico del espejo. (T12, p.1161)

Entre los LT que emplean *ángulo pequeño con el eje óptico*, llama la atención el T6. En él se definen los tres ángulos, medidos en radianes, que forman el rayo incidente, el radio del espejo y el rayo reflejado con el eje óptico de un espejo cóncavo respectivamente y se indica: “*Nótese que sólo la ecuación de  $\beta$  es exacta, porque el centro de curvatura del arco av está en C* (refiriéndose al ángulo entre el radio de curvatura y el eje óptico del espejo). *Sin embargo, las ecuaciones para  $\alpha$  y para  $\delta$  son aproximadamente correctas cuando estos ángulos son lo suficientemente pequeños.*” Luego de presentar la Ecuación 1 dice: “*Es importante notar que la ecuación 1 no contiene  $\alpha$  (o  $\beta$ ,  $\delta$  o  $\theta$ ) de modo que es válida para todos los rayos que incidan sobre el espejo con tal que sean suficientemente paraxiales.*” (T6, p.374) (NA). Es de destacar que mientras en este LT se resalta que la ecuación no contiene ángulos, en otros se explicita que: “*Es preciso entender con claridad que la ecuación (34.4) (refiriéndose a la Ecuación 1), así como muchas relaciones similares que deduciremos más adelante en este capítulo y en el siguiente, son sólo aproximadamente correctas. Es resultado de un cálculo que contiene aproximaciones, y sólo es válida con respecto a rayos paraxiales*” (T12, p.1162). De manera semejante en otro puede leerse: “*Cuando la abertura del espejo es grande, de modo que acepta rayos de gran inclinación, la ec. 21.3 (refiriéndose a la Ecuación 1) ya no es una buena aproximación*” (T1, p.850) (NA).

En el único LT donde se emplea la variable *ángulo pequeño con el eje óptico* y se identificó la segunda secuencia es, como ya se mencionó, el T8. En este ejemplar luego de comparar triángulos rectángulos semejantes y teniendo en cuenta la definición de aumento de espejos planos, se deduce el aumento de un espejo esférico. Seguidamente, mediante la misma técnica, pero haciendo énfasis en los ángulos iguales opuestos por el vértice, se establecen relaciones de la tangente trigonométrica de ángulos opuestos, se relaciona con el aumento y se deduce la Ecuación 1 sin realizar ni mencionar ninguna aproximación. Estas cuestiones se abordan en las páginas 1011 y 1012. Varias páginas más adelante, luego de presentar el fenómeno de refracción en diversos tipos de superficies, lentes delgadas y combinación de lentes, bajo el título “*Aberraciones de las lentes*” se señala: “*En este modelo simple, todos los rayos que salen de una fuente puntual se enfocan en un solo punto, produciendo una imagen nítida. Es claro que no siempre sucede así. Cuando las aproximaciones que se utilizan en este análisis ya no son válidas, se forman imágenes imperfectas*” (T8, p.1030) (NA).

Los LT que emplean *ángulo pequeño de incidencia y reflexión* para definir los rayos paraxiales son, como ya se mencionó, el T2, T5 y T11. En T2, al abordar el tema “*Enfoque de espejos esférico*” se indica que un rayo que incida paralelo al eje óptico se refleja cruzando al eje óptico “*aproximadamente a la mitad entre el espejo y el punto C*”, siempre que el ángulo de reflexión sea pequeño (T2, p.1033). Más adelante, durante la deducción de la Ecuación 1 iguala implícitamente un arco de circunferencia con un segmento sin indicar la aproximación realizada ni volver a mencionar los tamaños de los ángulos (T2, p.1036).

En T5 al presentar el tema “Punto focal y distancia focal”, se señala que calculará la distancia focal de una superficie reflectante considerando rayos que forman ángulo pequeño con el eje principal. No obstante, en la deducción de la ecuación de la distancia focal ( $f = r/2$ ) utiliza un esquema donde se señalan los ángulos de incidencia y de reflexión como pequeños y dice “la longitud  $FB$  casi es igual a la longitud  $FA$ ” (T5, p.843) refiriéndose a los segmentos determinados por el foco-punto de incidencia del rayo incidente y el foco-vértice de espejo. Finaliza expresando que en la aproximación realizada la distancia entre el centro del espejo y el punto focal es igual a la distancia desde el punto focal al vértice del espejo.

En T11 al desarrollar el tema “Aberraciones en los espejos esféricos” se señala: “Desde el punto de vista técnico, las descripciones que se han dado de las características de la imagen en los espejos esféricos sólo son ciertas **para objetos que estén cerca del eje óptico, esto es, sólo para ángulos pequeños de incidencia y de reflexión**” (T11, p.740) (NA). La aproximación realizada en este ejemplar no es evidente porque al deducir las ecuaciones de espejos esféricos emplea una secuencia similar a la descrita para el T8 (primero deduce el aumento y luego la ecuación que relaciona distancias objeto, imagen y radio de curvatura).

En T3 los rayos incidente y refractado forman ángulos pequeños con el eje del dióptrico. En él se define la zona paraxial o de Gauss como: “Es aquella en que los rayos de luz que intervienen en la formación de la imagen **son muy próximos al eje, verificándose que la altura ( $IB$ ), en que el rayo más alejado del eje encuentra al dioptrio, así como la distancia  $SB$  son despreciables frente a los valores de  $s$ ,  $s'$  y  $r$ . En la zona paraxial los ángulos medidos en radianes se confunden con sus senos y tangentes (T3, p.580) (NA). Las abreviaturas a las que alude en la definición se muestran en la fig. 5.**

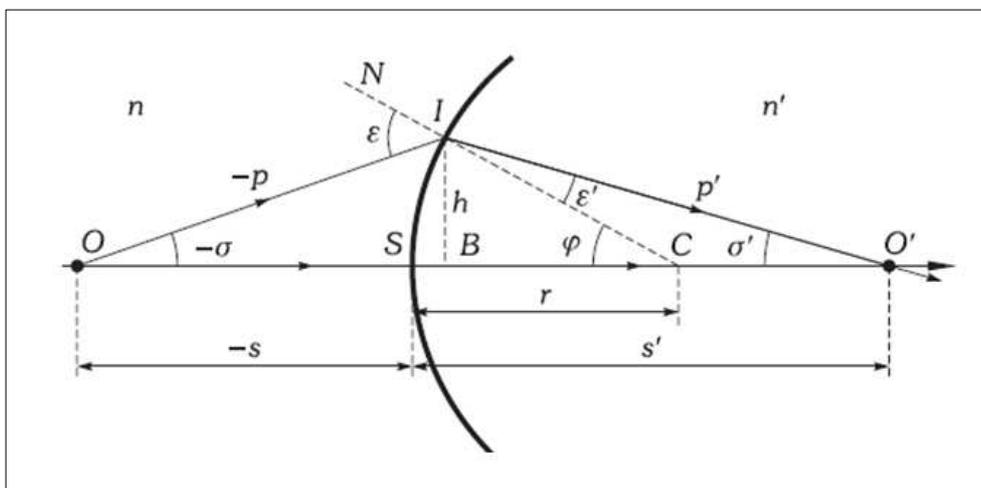


FIGURA 5. XXIV.31- Marcha de rayos de luz en un dioptrio esférico (T3, p.579).

## B2. Rayo cercano

La mayoría de los LT analizados que emplea la variable rayo cercano lo hace al presentar el tema aberraciones esféricas. En algunos de ellos (T2, T4, T10, T12) se caracteriza al rayo como “cercano” o “próximo” al eje para establecer el límite de validez de las ecuaciones de espejos esféricos, la marcha de rayos paralelos al eje principal, la construcción geométrica de imágenes o definir los rayos paraxiales.

En el resto de los ejemplares (T3, T7, T8, T9, T11) se indica que los rayos “marginales o que inciden cerca de los bordes extremos del espejo” o “lejanos al eje óptico” difuminan la imagen o producen una imagen borrosa, no se reflejan exactamente por el punto focal del espejo pese a ser paralelos al eje principal y acentúan la aberración esférica. Sólo en T3 se explicita que  $h$  debe ser despreciable frente al valor del radio.

## B.3. Tamaño del espejo

La variable “tamaño de espejo” se mencionada en seis LT (T1, T5, T6, T7, T9, T10). En dos ejemplares se especifica que el tamaño aludido refiere a la “apertura del espejo” (T1, T9) y en otros se refiere a la “sección del casquete esférico” o “hemisferio” (T7, T6). En el resto sólo se indica “espejo pequeño” (T5, T10). Por otro lado, la mitad de los ejemplares propone elementos de comparación para el adjetivo pequeño. Uno de ellos indica que la “apertura pequeña” debe compararse con la longitud focal del espejo (T9) y dos refieren a las “dimensiones pequeñas” en comparación con el radio de curvatura del espejo (T5, T6).

La utilidad de esta variable se advierte en expresiones tales como: “En la práctica, los espejos esféricos forman imágenes razonablemente nítidas siempre que sus aberturas sean **pequeñas comparadas con sus longitudes focales**” (T9, p. 673), o “... si el espejo es **pequeño comparado con su radio de curvatura** [...] los rayos se cruzarán unos a otros muy aproximadamente en un solo punto, o foco” (T5, p.843) (NA). Los límites de validez se explicitan en dos ejemplares (T1, T6). En uno de ellos se señala: “Nuestra descripción no se aplicaría para el caso de un espejo totalmente iluminado en forma de hemisferio completo” (T6, p.370); en el otro (T1) se advierte que si la abertura del espejo “es grande” la ecuación que relaciona las distancias objeto, imagen y focal respectivamente, ya no es una buena aproximación.

## VII. CONCLUSIONES

Se mostró que “ $\alpha$  pequeño” significa que  $\alpha \ll 1 \text{ rad}$  y se demostró que la inferencia “si  $\alpha$  es pequeño entonces  $\beta$  y  $\gamma$  también lo son” es verdadera sólo cuando la distancia del objeto al espejo es igual o inferior al radio de curvatura. Asimismo, se indicó que “rayos cercanos” representa  $h \ll r$  o  $\beta \ll 1 \text{ rad}$ ; y se mostró que dicha proposición es más general que ángulo pequeño, porque es independiente de la distancia objeto. Se concluye, acordando con Medina y Velazco (2018), que es preferible emplear la proposición rayos cercanos y si bien  $h \ll r$  es equivalente a  $\beta \ll 1 \text{ rad}$ , es conveniente emplear  $\beta$  ya que al compararse con una unidad convencional se independiza del sistema óptico.

Analizando la frecuencia absoluta de aparición de las variables se aprecia que la mayor (10) corresponde a *ángulo pequeño*, le sigue en orden decreciente (9) *rayos cercanos* y la menor (6) se relaciona con el *tamaño del espejo*. En la mayoría de los LT se emplean dos de las tres variables citadas para caracterizar a los rayos paraxiales, existiendo un único ejemplar (T10) donde se utilizan las tres variables. En un solo LT, sobre diez que usan ángulo pequeño, se explicita que el ángulo es pequeño si es *mucho menor que un radián* (T2). En solo un ejemplar (T3), sobre nueve que mencionan rayos cercanos, se especifica que los *rayos muy próximos* al eje son aquellos donde  $h$  es despreciable frente al valor del radio. El *tamaño del espejo* alude a la abertura del espejo, la sección del casquete esférico o al hemisferio, el cual se considera *pequeño*, en tres LT, si es menor que la longitud focal (T9) o el radio de curvatura del espejo esférico (T1, T6).

La descripción realizada en esta investigación, puso en evidencia cómo algunas adjetivaciones tales como “pequeño” o “cercano” son empleadas en la mayoría de los LT analizados, sin indicar los elementos comparativos. También mostró cómo en algunos ejemplares, se incurre en contradicciones o se evita mencionar la aproximación realizada. Dadas las características del estudio, los resultados no son generalizables, no obstante, se espera advertir a la comunidad educativa la importancia que tiene la selección de LT y promover investigaciones educativas centradas en la calidad de su contenido científico.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó en el marco del Proyecto de investigación Código 16Q-661 registrado en la Secretaría de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales dependiente de la Universidad Nacional de Misiones.

## REFERENCIAS

- Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.
- Bass, M. (1995). *Handbook of Optics, Vol. 1*, 2<sup>da</sup> ed. Nueva York: McGraw-Hill.
- Bravo, S. y Pesa, M. (2015). El fenómeno de la difracción en la historia de la óptica y en los libros de texto. Reflexiones sobre sus dificultades de aprendizaje. *Investigações em Ensino de Ciências*, 20(2), 76-102.
- Castano, D. y Hawkins, L. (2010). Conicoid Mirrors. *European Journal of Physics*, 32(2), 399-405.
- Krapas, S. (2008). El Tratado sobre la Luz de Huygens y su transposición didáctica en la enseñanza introductoria de Óptica. *Revista de Enseñanza de la Física*. 21(2), 49-60.
- Medina, C. y Velazco, S. (2018). Discusión de la aproximación paraxial y análisis numérico de la aberración de esfericidad. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40(2), e2314, pp.1-11.

Perales, F. J. (1987). Análisis de contenidos en Óptica Geométrica. *Enseñanza de las Ciencias*, 5(3), 211-219.

Perales, F. J. (1995). Los trabajos prácticos de óptica geométrica en libros de texto de EGB. *Alambique*, 6(2), 119-123.

Pesa, M. y Cudmani, L. (1993). Paralelismo entre los modelos precientíficos e históricos en la Óptica - Implicancias para la educación. *Cad. Cat. Ens. Fís.*, 10(2), 128-136.

Porta, L. y Silva, M. (2003). La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación educativa. En línea: <<http://abacoenred.com/wp-content/uploads/2016/01/An%C3%A1lisis-de-contenido-en-investigaci%C3%B3n-educativa-UNMP-UNPA-2003.pdf>> Acceso marzo 2018.

Ribeiro, J. y Carneiro, M. (2016). A reflexão da luz nos periódicos de Ensino de Física: evidenciando tendências e carências de pesquisa a partir de uma revisão bibliográfica. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 33(2), 355-398.

Şengören, S. y Çoban, G. (2011). Some remarks on using the principal rays for teaching the elementary optics. *Latin-American Journal of Physics Education*, 5(1), 123-125.

Solbes Matarredona, J y Zacarés García, J. (1993). ¿Qué sucede con la enseñanza de óptica? *Revista Española de Física*. (7)4, 38-43.