

Una contribución para la enseñanza de la dinámica de las rotaciones

A contribution to the teaching of rotation dynamics

Lorenzo M. Iparraguirre¹

¹Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende y Haya de la Torre. Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina.

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

E-mail: ipa@famaf.unc.edu.ar

(Recibido el 27 de agosto de 2019; aceptado el 20 de octubre de 2019)

Resumen

El movimiento de precesión contiene detalles sorprendentes y atractivos que, aunque no pueden ser examinados en profundidad en el nivel medio, sí pueden ser presentados y mostrados con elementos tan sencillos como un trompo o una rueda de bicicleta, recurriendo a aproximaciones rudimentarias adecuadas, consistentes básicamente en razonar sobre el efecto del impulso angular aplicado sobre el sistema por el momento de la fuerza actuante. En estas páginas se muestra cómo es posible profundizar gradualmente en la aplicación de la ley del impulso angular, manteniendo el razonamiento de sentido físico para trascender las aproximaciones rudimentarias, sin ingresar a los tratamientos matemáticos habituales. Finalmente se muestra cómo incorporar las ideas en un sencillo programa de cálculo que resuelve todas las situaciones, y permite explorarlas a través de la manipulación de los valores iniciales.

Palabras clave: Rotación; Velocidad angular; Movimiento de precesión; Trompo; Vector axial.

Abstract

The precession movement contains surprising and attractive details that although they cannot be examined in depth at the medium level, they can be presented and displayed with elements as simple as a spinning top or a bicycle wheel, using appropriate rudimentary approaches, basically consisting of reason about the effect of the angular impulse applied on the system by the moment of the acting force. These pages show how it is possible to gradually go deeper into the application of the angular impulse law, maintaining the reasoning of physical sense to transcend the rudimentary approaches, without entering the usual mathematical treatments. Finally, it shows how to incorporate ideas into a simple calculation program that solves all situations, and allows them to be explored through the manipulation of initial values.

Keywords: Rotation; Angular velocity; Precession movement; Spinning-top; Axial vector.

I. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la dinámica del movimiento de rotación puede iniciarse con los casos de cuerpos que tienen un eje de simetría de revolución y rotan alrededor del mismo, que se mantiene fijo. Es decir, casos simplificados de lo que se denomina *rotación pura*. En este esquema pueden plantearse fácilmente analogías con el movimiento lineal que son útiles para extender los conceptos de uno al otro, incluyendo la estructura vectorial, que invita a introducir los vectores axiales. La enseñanza del concepto de vector axial recibe un fuerte apoyo del movimiento de precesión en la medida en que éste se vea simple y accesible, y eso se logra recurriendo a algunas simplificaciones muy típicas y difundidas.

Esencialmente esas simplificaciones consisten en ignorar las componentes de la velocidad angular fuera del eje de rotación, de manera que para todos los análisis se tiene que los vectores velocidad angular y cantidad de movimiento angular están siempre alineados con el eje de rotación. De esto resulta un esquema simple y natural, en el cual se aplica con bastante facilidad la que puede considerarse como la ley dinámica fundamental para las rotaciones: $\vec{M} \delta t = \delta \vec{J}$, en directa analogía con la Ley del Impulso del movimiento lineal, y en la cual:

- \vec{M} sería el vector axial representativo del momento resultante de las fuerzas exteriores, y
- $\vec{J} = I \vec{\omega}$ sería el vector axial representativo de la cantidad de movimiento angular, siendo I el momento de inercia respecto del eje, y $\vec{\omega}$ el vector axial representativo de la velocidad angular.

Con esta ley es posible tratar casos de conservación de la cantidad de movimiento angular y presentar a los alumnos el concepto de vector axial, e ilustrarlo experimentalmente con trompos y volantes.

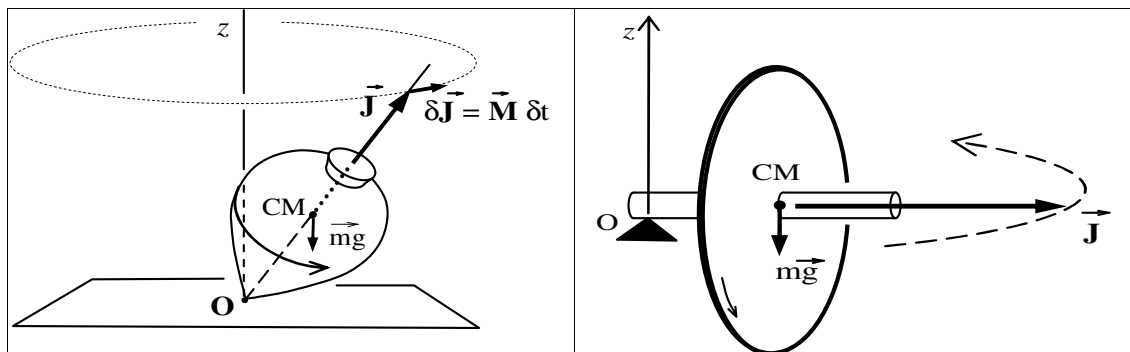


FIGURA 1. Ilustración típica del movimiento de precesión de un trompo y de un volante girando rápidamente alrededor de su eje, el cual, debido al momento de la fuerza peso con respecto al punto fijo O, circula de la manera indicada.

En la figura 1 se muestran los elementos que intervienen en el esquema explicativo básico: el peso del trompo (o del volante o de la rueda de bicicleta) aplica con respecto al punto de apoyo fijo, O, un momento M, que se considera un vector axial perpendicular al plano definido por el eje de rotación del trompo o volante y el eje vertical (z); en cada pequeño intervalo δt la ley $\vec{M} \delta t = \delta \vec{J}$ predice la variación del vector \vec{J} que, como se muestra en la figura, resulta en el movimiento de precesión alrededor del eje z.

El movimiento es muy sorprendente, los vectores axiales son muy sorprendentes, y el hecho de que funcionen en un esquema explicativo tan simple también es sorprendente.

Lo sorprendente y simple de todo el esquema explicativo contribuye a facilitar la comprensión del tema y la fijación de algunos conceptos, habida cuenta de que además se presta para ensayar modificaciones experimentales (cambiar sentidos de rotación, cambiar punto de apoyo, etc.) que sirven para poner a prueba la aplicación de la ley, y ayudan a desarrollar la capacidad de hacerlo con éxito.

II. LAS DIFICULTADES DEL PROFESOR

Ahora bien, en toda la presentación intervienen simplificaciones muy importantes, sin las cuales el tratamiento podría ser sumamente engorroso e inadecuado no solamente para el nivel del alumno, sino también para el nivel de cualquier profesor que no tenga una formación especial en el tema.

Hay un detalle clave que el profesor debe entender, y es el significado del vector $\vec{\omega}$. Este vector indica en cada instante el movimiento de cualquier punto material de un sólido. Para el caso en que O es un punto fijo del eje que se adopta como origen de coordenadas, el desplazamiento de primer orden de cada punto material en cada intervalo δt está dado por: $\delta \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \delta t$. Esto significa que los puntos materiales que en un instante dado están en la recta que pasa por O con la dirección de $\vec{\omega}$, están (instantáneamente) en reposo. Esta línea constituye lo que se denomina *eje instantáneo de rotación*. Y una característica básica del movimiento del sólido es que, para cualquier movimiento posible de un sólido, *en cada instante existe un eje instantáneo de rotación* (ver Goldstein, 2000; Landau y Lifschitz, 1994).

Ahora bien, si estamos en un caso simple de rotación pura, con el eje de rotación fijo, éste coincide trivialmente con el eje instantáneo de rotación y sus puntos están siempre en reposo. Pero en un movimiento más general, como el de precesión, lo que se identifica visualmente como eje de rotación (el eje del trompo, por ejemplo) se mueve describiendo un cono que deja fijo solamente al punto O, y por lo tanto no puede ser el eje instantáneo de rotación.

De manera que, a partir de aquí, deberemos distinguir con claridad a qué eje nos referimos en cada afirmación. El cuerpo que consideramos tiene un eje de simetría de revolución, al cual llamaremos x_3 (de los otros ejes, x_1 y x_2 hablaremos más adelante), pero el cual no necesariamente coincide con el eje instantáneo de rotación del movimiento que estamos considerando.

En el caso de la precesión los puntos del eje x_3 se mueven describiendo un cono, de manera que $\vec{\omega}$, que es quien señala la ubicación del eje instantáneo de rotación, no puede coincidir con x_3 : debe tener una componente perpendicular a él.

Cuando esta componente es muy pequeña se tienen un movimiento muy lento de x_3 , lo que se da cuando la velocidad de rotación es suficientemente grande como para que el momento actuante sólo pueda producir un movimiento de precesión muy lento.

En esas condiciones se puede trabajar con la idea (errónea pero aproximada y útil) de que los vectores $\vec{\omega}$ y \vec{J} están siempre alineados con el eje x_3 , y de que la ley $\vec{M} \delta t = \delta \vec{J}$, al indicar la evolución de \vec{J} , automáticamente indica la de $\vec{\omega}$ y la del eje.

De manera que es recomendable que el profesor utilice estas estrategias para introducir el tema ante un público sin formación especializada, pero también es recomendable que él advierta que esto puede no ser totalmente correcto.

El problema que encuentra el profesor cuando advierte esto, es que el tema es tan complejo, que es extraordinariamente difícil profundizar gradualmente en él. No se encuentran en los textos niveles intermedios de profundidad: los textos básicos como Maiztegui y Sábato (1951), Alonso (1986) y Serway (2008), trabajan con las simplificaciones más gruesas, llegando a comentarios interesantes sobre su complejidad algunos como Roederer (2010) y Feynman, Leighton y Sands (1971), pero para obtener cualquier resultado concreto que trascienda lo trivial es necesario ser un experto y adentrarse en la complejidad matemática total de los textos especializados como Goldstein (2000), Landau y Lifschitz (1994), o Roy (1970).

III. UNA IDEA PARA UNA PROPUESTA DIFERENTE

A continuación en estas páginas presentaremos una forma de profundizar en el tema continuado simplemente con la aplicación de la ley del impulso angular: $\vec{M} \delta t = \delta \vec{J}$. Para ello, debemos puntualizar algunos detalles básicos que se encuentran en todos los textos especializados (como Goldstein, 2000):

1) Consideraremos el movimiento de una peonza simétrica, es decir un cuerpo con un eje de simetría de revolución, que denominaremos x_3 , girando con gran velocidad angular alrededor de este eje. De manera que x_3 será uno de los ejes principales del tensor de inercia de este cuerpo, y los otros dos ejes principales, x_1 y x_2 , son cualquier par de ejes perpendiculares al anterior, y entre sí. Los correspondientes momentos de inercia de esta peonza, por lo tanto, son $I_1 = I_2$, en general distintos de I_3 ;

2) En un movimiento general el vector velocidad angular, $\vec{\omega}$, puede cambiar instante a instante de las maneras más diversas. Si en cada instante se lo expresa por sus componentes $\vec{\omega}_i$ según los ejes principales mencionados, se pueden expresar las componentes del vector cantidad de movimiento angular por medio de la relación $\vec{J}_i = I_i \vec{\omega}_i$, que equivale a la expresión general para \vec{J} en el sistema de ejes principales: $\vec{J} = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 + I_3 \vec{\omega}_3$. De manera que en general para cada instante se tendrá una componente según el eje x_3 : $\vec{J}_3 = I_3 \vec{\omega}_3$, y otra transversal, según alguna dirección cualquiera del plano perpendicular, $\vec{J}_\perp = I_1 \vec{\omega}_\perp$ (para esta dirección transversal utilizaremos I_1 , ya que es igual a I_2 , y no interesa distinguirlos);

3) Considerando los casos que nos interesan con un punto del cuerpo fijo en el origen O, el vector velocidad de cualquier otro punto material estará dado en cada instante por la relación: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Esta relación es básica, expresa el movimiento de cualquier punto de un cuerpo sólido con un punto fijo en el origen. En ella $\vec{\omega}$ es un vector *instantáneo*; expresión que se utiliza para enfatizar el hecho de que puede variar instante a instante, de cualquier manera, y la relación siempre deberá cumplirse. De manera que a partir de $\vec{\omega}$ determinado en un instante dado, puede calcularse el desplazamiento de primer orden de cualquier punto material en el siguiente intervalo infinitesimal con la expresión que ya hemos do: $\delta \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \delta t$;

4) La ley que vamos a utilizar, $\vec{M} \delta t = \delta \vec{J}$, nos permite determinar cómo debe variar \vec{J} en cada intervalo δt . Y como vemos, a diferencia de los puntos materiales, el desplazamiento de \vec{J} no depende de $\vec{\omega}$. Es decir \vec{J} no está obligado a seguir automáticamente a $\vec{\omega}$ ni al eje de rotación, sino solamente a cumplir con esta ley. Es decir, ni $\vec{\omega}$, ni \vec{J} , ni el eje x_3 , están obligados a alinearse ni a seguir alguno de ellos el movimiento de otro, aunque pueda haber casos de interés en los que la alineación de los tres se mantiene muy próxima.

A partir de estas consideraciones elaboraremos un razonamiento (y con él luego un procedimiento) para determinar cómo deben evolucionar en el tiempo $\vec{\omega}$, \vec{J} , y el eje x_3 , partiendo del estudio de la situación típica de suprimir uno de los apoyos del eje de un volante que gira a gran velocidad.

IV. TRATAMIENTO INTRODUCTORIO

Comenzaremos con el caso simplificado de un volante o rueda de bicicleta con su eje de rotación ejecutando el movimiento de precesión en un plano horizontal, reservando para una segunda instancia el caso general de cualquier inclinación. Consideremos una situación inicial con el volante girando con gran velocidad angular

ω_3 , con el eje x_3 en reposo alineado con el eje y fijo de un sistema de referencia inercial (X, Y, Z) ubicado como se muestra en la figura 2. Previamente, antes del instante $t = t_0$ en que se quitará el apoyo del extremo derecho, el momento aplicado es nulo porque el eje está apoyado en sus dos extremos, el vector $\vec{\omega}$ está alineado con \vec{J} y con el eje x_3 (por lo cual es válido tomar $\vec{\omega} = \vec{\omega}_3$ en esos instantes previos).

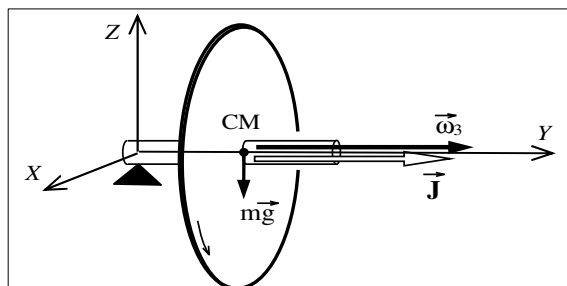


FIGURA 2. Un volante está girando a gran velocidad, con su eje horizontal alineado con el eje Y , y apoyado en sus dos extremos, hasta el instante mostrado en la figura en que se ha suprimido el apoyo del extremo derecho.

Veamos ahora lo que sucede a partir de $t = t_0$. Lo primero que hay que decir es que comienza a actuar el momento de la fuerza peso: $M = m g L$, siendo en esta expresión $L =$ distancia entre O y CM . Este momento está representado por un vector axial que siempre se mantendrá perpendicular al plano definido por Z y x_3 ; en este primer intervalo, \vec{M} apunta hacia $-X$.

De manera que en el primer intervalo δt , bajo la acción del momento de la fuerza peso respecto del origen, \vec{J} sufrirá una variación $\delta \vec{J} = \vec{M} \delta t$, en dirección $-X$. Es decir, claramente en $t_1 = t_0 + \delta t$, el vector \vec{J} habrá girado en el plano XY , alrededor del eje Z , un pequeño ángulo $\delta \phi_1 = M \delta t / J = mgL \delta t / I_3 \omega_3$, y ahora tendrá componentes $J_X(t_1) = -M \delta t$; $J_Y(t_1) \equiv J(t_0) = I_3 \omega_3$.

Ahora bien, la aparición de la componente J_X automáticamente implica la aparición de una componente $\omega_x = J_X / I_1 = -(M / I_1) \delta t$, la cual tendrá importancia en los siguientes intervalos.

Pero el eje del volante no habrá girado junto con \vec{J} , porque los puntos materiales exactos del eje x_3 no se habrán movido en absoluto, ya que tienen el movimiento dado por $\delta \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \delta t$.

A continuación, dejemos transcurrir otro intervalo: $t_1 \rightarrow t_2 = t_1 + \delta t$.

Por un lado, tenemos que, en virtud de la misma ley dinámica $\delta \vec{J} = \vec{M} \delta t$, los vectores $\vec{\omega}$ y \vec{J} vuelven a sufrir un incremento similar cada uno al anterior, de primer orden, en dirección $-X$: $J_X(t_2) = -2M \delta t$; $\omega_x(t_2) = -(2M / I_1) \delta t$.

Pero ahora hay una componente ω_x que indica un movimiento del eje x_3 en el plano ZY , hacia abajo. Así es que el eje x_3 gira un ángulo $\delta \theta = \omega_x \delta t = (M / I_1) (\delta t)^2$ alrededor del eje X - éste es un desplazamiento de segundo orden en δt , en principio despreciable, pero que irá incrementándose en el transcurso de sucesivos intervalos.

Ahora bien, nuevamente hay algo notable: esta inclinación del eje x_3 no es compartida por \vec{J} , que solamente varía en la dirección del momento aplicado, que es la del eje X , como ya hemos considerado al aplicar $\delta \vec{J} = \vec{M} \delta t$. De manera que esta inclinación del eje x_3 no compartida por \vec{J} , da lugar a que aparezca una proyección de este vector en la dirección perpendicular a x_3 , en el plano YZ , dando origen, en la práctica, a una componente $\omega_z = J \delta \theta / I_1 = (MJ / I_1^2) (\delta t)^2$, también de segundo orden, en principio despreciable, pero que irá incrementándose.

Esta componente ω_z es la que, en un próximo intervalo, indicará que el eje x_3 comienza a girar alrededor de Z en un inicio de lo que será la precesión.

Aunque este razonamiento no pretende ir mucho más allá, permite prever que luego de varios intervalos en los cuales ω_x y J_X crecen linealmente con el tiempo, sus valores ya no serán tan pequeños, y harán que en cada intervalo el eje x_3 gire un ángulo $\delta \theta = \omega_x \delta t$, hacia abajo, que podrá ser considerado de primer orden en δt , y que implicará una componente ω_z del valor correspondiente para mantener constantemente $J_Z = 0$. Por otra parte, a medida que el plano definido por Z y x_3 adquiera cierta velocidad de precesión ω_p , competirá con la rotación de \vec{J} (debida a \vec{M}) alrededor de Z , pudiéndose concebir que la componente de $\vec{\omega}$ perpendicular a dicho plano disminuya o desaparezca. Este análisis tan simplificado no pretende decidir si se llegará a esta situación, pero sugiere que se avanzará en ese sentido, y en el próximo punto mostraremos detalles más finos.

Pero, antes de hacerlo, es interesante notar que, si ω_3 es suficientemente grande como para que la influencia de \vec{M} sea pequeña y la velocidad de precesión lenta, ésta constituirá la componente ω_z , que deberá ser: $\omega_p = \omega_z = M / I_3 \omega_3$, y la inclinación del eje por debajo de la horizontal deberá ser: $I_1 \omega_z / I_3 \omega_3 \ll 1$, de manera que cuanto mayor sea ω_3 , menos perceptible será el hecho de que el eje haya

tenido que comenzar a moverse hacia abajo. En estas condiciones tiene sentido haber descrito un movimiento en el cual el eje circula aproximadamente en un plano horizontal, y todas las ideas resultan más simples.

Luego de este entrenamiento podemos encarar el caso general en el próximo punto.

V. EL RAZONAMIENTO COMPLETO Y UN MÉTODO DE CÁLCULO

En un instante genérico t el eje x_3 estará ubicado por su ángulo polar, θ , y azimutal, φ . El eje vertical Z , y x_3 definirán el plano π , indicado por el mismo ángulo azimutal φ . Por otra parte, el vector \vec{J} tendrá componentes ortogonales \vec{J}_3 , a lo largo de x_3 , y \vec{J}_\perp en el plano perpendicular a x_3 . Esta componente \vec{J}_\perp , a su vez, tendrá componentes \vec{J}_1 en el plano π , y \vec{J}_θ perpendicular a dicho plano (el nombre J_θ indica que esa componente está asociada con la componente de la velocidad angular que se define por la variación de θ : $J_\theta = I_1 \omega_\theta$; $\omega_\theta = \delta\theta/\delta t$). En la figura 3, a la izquierda se tiene una vista frontal de estos elementos, ya la derecha, una vista desde arriba, es decir, desde el eje Z , mostrando las componentes fuera del plano π .

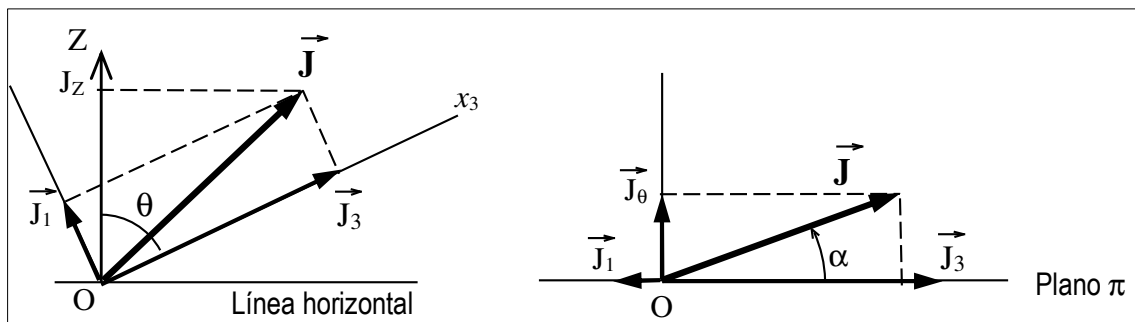


FIGURA 3. Izquierda: vista de las componentes ortogonales de \vec{J} en el plano π , definido por Z y x_3 ; Derecha: vista desde arriba.

Luego en la figura 4 se muestra la variación de todos estos elementos en un pequeño intervalo δt genérico, determinada por los siguientes criterios.

Por un lado, tenemos que, como se muestra en la figura 4 (izquierda), en cada δt la variación de θ implica una variación $\delta J_1 = J_3 \delta\theta = J_3 \omega_\theta \delta t$, y de allí: $\delta \omega_1 = J_3 \omega_\theta \delta t / I_1$.

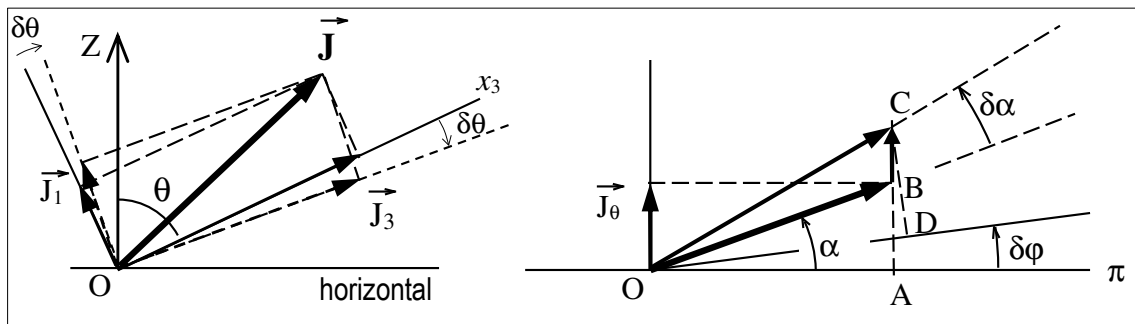


FIGURA 4. Izquierda: vista de las componentes ortogonales de \vec{J} en el plano π , definido por Z y x_3 . Los vectores \vec{J}_1 y \vec{J}_3 se muestran en línea llena antes, y en línea de trazos después, del intervalo δt ; Derecha: vista desde arriba.

Por otra parte \vec{J}_1 define $\omega_1 = J_1/I_1$, que es una componente de $\vec{\omega}$ que indica una variación de φ a través de la relación $\delta\varphi \text{ sen}\theta = \omega_1 \delta t$.

Y en cada δt el momento produce una variación $\delta \vec{J} = \vec{M} \delta t$ que se muestra en la figura 4 (derecha) representado por el segmento BC , directamente en la dirección de \vec{J}_θ , es decir perpendicular al plano π . Pero en el mismo δt este plano gira $\delta\varphi$ en el mismo sentido, de manera que $J_\theta(t)$, que está representado en esta figura por el segmento AB , pasa a estar representado en $(t+\delta t)$ por el segmento DC . Y teniendo en cuenta que $\delta\alpha$ y $\delta\varphi$ son incrementos pequeños, resulta que el incremento δJ_θ está dado por $DC - AB \cong AC - \delta\varphi OA - AB \cong BC - \delta\varphi OA$.

Ahora bien, de la figura de la izquierda se obtiene que $OA = J_3 \text{sen}\theta - J_1 \text{cos}\theta$, de manera que $\delta J_\theta = M \delta t - \delta\varphi (J_3 \text{sen}\theta - J_1 \text{cos}\theta)$, y finalmente ω_θ deberá sufrir una variación:

$$\begin{aligned} \delta\omega_\theta &= \frac{m g L \text{sen}\theta}{I_1} \delta t - \frac{\omega_1}{\text{sen}\theta} \delta t \left(\frac{J_3 \text{sen}\theta}{I_1} - \omega_1 \text{cos}\theta \right) \\ &= \left(\frac{m g L \text{sen}\theta}{I_1} - \frac{J_3 \omega_1}{I_1} + \frac{\omega_1^2 \text{cos}\theta}{\text{sen}\theta} \right) \delta t \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora este razonamiento puede ser implementado en un programa que permita calcular la evolución de los ángulos polar (θ) y azimutal (φ) del eje x_3 en el tiempo.

Para ello partiremos de $\varphi = 0$, y $\theta = \theta_0$, valor arbitrario.

El programa deberá ejecutar las siguientes acciones:

- 1.- Adquirir valores de $m, g, L, \theta_0, I_1, I_3, \omega_3$ y δt ;
- 2.- Calcular $J_3 = I_3 \omega_3$. Definir $\varphi = 0$; $\theta = \theta_0$; $\omega_1 = 0$; $\omega_\theta = 0$; $\omega_\varphi = \omega_1/\text{sen}\theta$ (Vale notar que estos puntos 1 y 2 pueden mezclarse de diferentes maneras);
- 3.- Definir iterativamente el efecto de cada δt haciendo:

$$\omega_\theta \rightarrow \omega_\theta + \left(\frac{m g L \text{sen}\theta}{I_1} - \frac{J_3 \omega_1}{I_1} + \frac{\omega_1^2 \text{cos}\theta}{\text{sen}\theta} \right) \delta t \tag{2}$$

$$\omega_1 \rightarrow \omega_1 + \frac{J_3 \omega_\theta \delta t}{I_1} \tag{3}$$

$$\theta \rightarrow \theta + \omega_\theta \delta t; \text{ almacenar valor como } \theta(t) \tag{4}$$

$$\varphi \rightarrow \varphi + \omega_\varphi \delta t; \text{ almacenar valor como } \varphi(t) \tag{5}$$

- 4.- Graficar $\theta(t), \varphi(t), \theta(\varphi)$.

VI. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Cualquier programa realiza rápidamente estas instrucciones con un *loop*, tomando la única precaución de definir el intervalo δt suficientemente pequeño. Una forma de elegir un valor adecuado consiste en probar inicialmente con algún valor que se considere pequeño, y luego probar variándolo. Los resultados en general serán más confiables disminuyendo δt , pero eso requerirá más iteraciones para cubrir el mismo intervalo total de tiempo, de manera que con unas pocas pruebas se puede encontrar un incremento que funciona bien.

Una vez ajustados estos detalles de funcionamiento surge naturalmente la inquietud de explorar diversos casos, y al hacerlo se advierte que esta exploración sugiere una interesante estrategia de estudio del tema, consistente en analizar los aspectos teóricos que justifican lo que se obtiene en las diferentes gráficas, en función de los valores suministrados a cada variable.

Igualmente, instructiva es la tarea de determinar los valores que permitirán obtener determinados comportamientos.

Estas estrategias exigen involucrarse con cada situación dentro de un marco esencialmente geométrico y físico, a través de procedimientos muy simples.

Se logra así una comprensión mucho más accesible y satisfactoria que la que puede alcanzarse con el procedimiento habitual, esencialmente matemático y de una complejidad inaccesible para profesores no especializados en el tema.

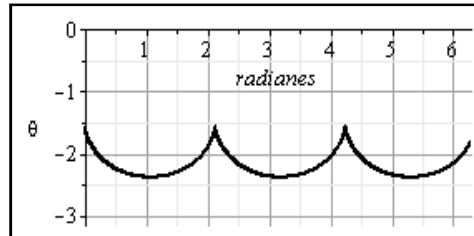
Para terminar, se sugieren algunos casos interesantes que pueden explorarse.

1) *El péndulo*. Si se suministra $\omega_3 = 0$, se obtienen las oscilaciones del péndulo. Vale aclarar que θ no está limitado por el valor π , y las oscilaciones quedan expresadas con $\varphi = \text{cte}$, y $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$. El programa

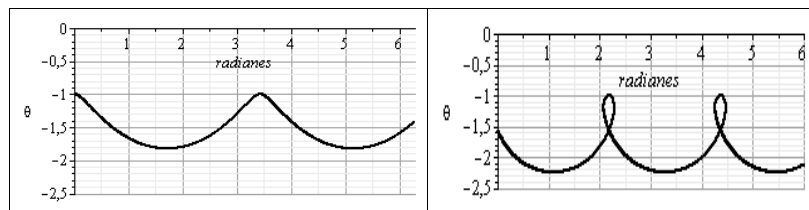
ma podría modificarse para solucionar el problema en $\theta = \pi$, pero no es necesario. Jugando con θ_0 puede verse claramente la variación del período con la amplitud.

2) *La precesión pura.* Si se suministra el valor inicial de ω_1 para que $\omega_\phi = \omega_1/\sin\theta_0$ sea igual al valor $mgL/I_3\omega_3$, se obtendrá la precesión pura sin nutación: $\theta(t) = \text{cte} = \theta_0$.

3) *El caso didáctico de la rueda con eje horizontal.* Con el valor inicial $\omega_1 = 0$, la gráfica $\theta(\phi)$ muestra cómo el movimiento del eje se inicia hacia abajo (luego de suprimir un apoyo en la rueda que gira). Como ejemplo, la siguiente es la gráfica $\theta(\phi)$ para una rueda con $m = 1$ kg; $L = 5$ cm, $mgL = 0,50$ Nm; $I_3 = 0,02$ kgm²; $I_1 = 0,0125$ kgm², girando con $\omega_3 = 5$ 1/s, para el caso $\theta_0 = \pi/2$, $\omega_1 = 0$ (en eje de ordenadas se ha cambiado el signo de θ para que la imagen sea más realista).



4) *Las variaciones de precesión con nutación.* Con variaciones de valor y signo de ω_1 se obtienen todas las formas de movimiento del eje de la peonza que muestran los textos especializados (Goldstein, 2000; Landau y Lifschitz, 1994; Roy, 1970). Como ejemplo, se muestran las gráficas $\theta(\phi)$ para una rueda con los mismos valores de la gráfica anterior, pero con $\theta_0 = 1$, y $\omega_1 = 1,5$ (izquierda), y $-1,5$ (derecha).



5) *La precesión libre de la peonza simétrica.* Con $L = 0$, se obtiene la precesión libre de la peonza simétrica. Si se da el valor adecuado a ω_1 puede ubicarse el vector \vec{J} en el eje Z , de manera que resulta $\theta(t) = \text{cte}$, $\phi = \omega_p t$, siendo ω_p la velocidad angular de precesión, cuyo valor se puede comparar con $\omega_p = J/I_1$ según las fuentes (Goldstein, 2000).

También se pueden explorar valores de ω_1 que dan otras ubicaciones del vector \vec{J} , y plantean evoluciones más complicadas para $\theta(t)$ y $\phi(t)$.

REFERENCIAS

Alonso, M. y Finn, E. (1986). *Física – Vol. I – Mecánica*. Addison Wesley Iberoamericana.

Feynman, R, Leighton, R. y Sands, M. (1971). *The Feynman Lectures on Physics- Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*. Foro Educativo Interamericano.

Goldstein, H. (2000). *Mecánica Clásica*. Barcelona: Reverte.

Landau, D. y Lifschitz, E. (1994). *Mecánica*. Barcelona: Reverte.

Maiztegui, A. y Sábato, E. (1951). *J. Introducción a la Física. I*. Kapeluz.

Roederer, J.G. (2010). *Mecánica Elemental*. Buenos Aires: Eudeba

Roy, M. (1970). *Mecánica I – Cuerpos rígidos*. Traducción Vergés – Freixa Janariz. Ed. Marcombo S.A. de Boixareu Editores.

Serway, R. y Jewet, J. (2008). *Física para Ciencias e Ingeniería*. México: Cervantes González.