


Buracos negros: uma abordagem conceitual para professores do ensino médio

Black holes: a conceptual approach for high school teachers

Istenio Nunes de Morais ^{1*}

¹ Universidade Federal de São João del Rei, Departamento de Ciências Naturais (DCNAT), Campus Dom Bosco. Praça Dom Helvécio, 74 - Fabricas, CEP: 36.301-160, São João del Rei - MG, Brasil.

*E-mail: isteniom@hotmail.com

Recibido el 5 de julio de 2022 | Aceptado el 2 de noviembre de 2022

Resumo

Neste trabalho, apresentamos alguns conceitos e aspectos interessantes acerca dos efeitos sofridos por uma partícula imersa em um campo gravitacional provocado por um buraco negro. Primeiro, explicamos como é definido o campo gravitacional na concepção da Gravitação Universal Newtoniana. Damos uma rápida introdução aos conceitos de geodésica e curvatura do espaço-tempo, em seguida buscamos explorar a primeira solução exata das Equações de Einstein para buracos negros, e suas consequências no espaço-tempo. Para isso, apresentamos os conceitos, e os ilustramos com cálculos simples que permitem uma melhor clareza dos conceitos.

Palavras chave: Buracos Negros; Relatividade Geral; Solução de Schwarzschild; Geodésica.

Abstract

In this paper we present some interesting concepts and aspects about the effects suffered by a particle immersed in a gravitational field caused by a black hole. First, we explain how the gravitational field is defined in the conception of Newtonian Universal Gravitation. We give a quick introduction to the concepts of geodesics and curvature of space-time, then seek to explore the first exact solution of the Einstein Equations for black holes, and its consequences on space-time. To do this, we present the concepts, and illustrate them with simple calculations that allow for better clarity of the concepts.

Keywords: Black Hole, General Relativity, Schwarzschild's Solution, Geodesic.

I. INTRODUÇÃO

Quando estrelas muito massivas chegam ao fim de suas vidas, queimando todo o seu combustível nuclear após sucessivos processos de reações termonucleares na região central da estrela, convertendo os núcleos atômicos em núcleos cada vez mais pesados até chegar ao Ferro, colapsam pela força gravitacional concentrando toda a sua massa em um ponto infinitesimal no espaço, gerando assim um objeto cujo o campo gravitacional é tão intenso que nem mesmo a luz pode escapar. Esses objetos recebem o nome de Buracos Negros.

A descrição desses objetos, que até pouco tempo teria sido incompreendida, tornou-se bem comum em diversos canais de divulgação científica, muitas vezes feitas por “não cientistas”. Por diversas vezes apresentando estes objetos como imensos ralos devoradores de qualquer corpo celeste que entre em seu caminho.

A Teoria Geral da Relatividade (TGR), formulada por Albert Einstein e publicada em 1915, propôs uma nova teoria métrica da gravitação e trouxe uma maneira diferente de compreender a gravidade, definindo-a como uma

consequência da curvatura no espaço-tempo causada pela presença de energia e matéria. É esta teoria que descreve, e explica, a existência de Buracos Negros.

A TGR excede em muito a formação dos professores de Física, principalmente os mais antigos. No geral seus conhecimentos chegam até os elementos básicos da Teoria da Relatividade Especial, que trata dos eventos que são relativos e dos que são absolutos no espaço e no tempo, e do movimento. O público em geral entende que os Buracos Negros são objetos extremamente massivos que geram uma incrível força de atração gravitacional, mas, segundo as crenças difundidas nas redes, são capazes de devorar qualquer corpo que passe por perto deles, e que nunca mais serão capazes de escapar. Este também é o entendimento de maioria dos professores de Física.

Entretanto, espera-se que um professor formado em Física tenha muito claro que um Buraco Negro não pode devorar um corpo com momento angular orbital suficiente, e que é possível um corpo estar em órbita em torno desses objetos. E que se pudéssemos, magicamente, comprimir o Sol até um volume suficientemente pequeno para transformá-lo em um Buraco negro, a única mudança que seria sentida na Terra seria a falta de luz e calor, porém todo o sistema solar continuaria orbitando em torno dele por bilhões de anos sem absolutamente nenhuma diferença na dinâmica dos corpos.

Estudar os fenômenos físicos é fundamental, e importante, na formação de qualquer cidadão crítico e consciente, dado a evolução técnico-científica pela qual passamos no último século. Além da Física Clássica que é tradicionalmente ensinada nas escolas, é importante que também sejam trabalhados os conhecimentos gerados pela ciência a partir do século vinte. A física moderna, como é comumente conhecida, é o conjunto de conhecimentos e teorias elaboradas a partir do início do séc. XX, destacando-se a mecânica Quântica, a Física Nuclear e as Teorias da Relatividade Especial e Geral.

O principal objetivo neste trabalho foi a elaboração de um texto didático para o ensino de conceitos da Relatividade Geral, acerca do tema de Buracos Negros e os efeitos causados em um corpo que o orbite. Não tentaremos ensinar o formalismo da TGR e nem mostrar todas as possibilidades para estes objetos. Procuramos apresentar alguns conceitos associados à solução de Schwarzschild para as equações de Einstein, que é a primeira interpretação, e a mais simples, que descreve a solução de vácuo para um campo gravitacional de uma distribuição de matéria esféricamente simétrica, estática e sem carga que leva, naturalmente a existência de buracos negros.

Para isso, recorreremos ao exemplo de um objeto com a massa do Sol, cuja distância para se cair em direção ao centro de massa é da ordem do raio da órbita da terra, para tanto desenvolveremos os cálculos necessários.

II. CAMPO GRAVITACIONAL

Na Mecânica Newtoniana, a gravitação universal nos dá conta das forças entre dois corpos quaisquer de massas M e m , separados por uma distância r . A força que atua nesses corpos é mútua, proporcional ao produto das duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas (Thornton & Marion, 2011), e é dada pela expressão:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Onde F é o módulo da força que é atrativa e orientada na direção do centro de massa dos corpos, G é a constante gravitacional, que tem o valor de aproximadamente $6,67 * 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

O vetor campo gravitacional representa a força por unidade de massa de um particular sob o efeito da força no campo de uma massa M . Portanto:

$$\mathbf{g} = \frac{F}{m}$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{m} \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

Como \mathbf{g} varia com o inverso do quadrado da distância $\frac{1}{r^2}$, podemos representá-lo como sendo o gradiente de uma função escalar. Assim:

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi$$

Onde Φ é o potencial gravitacional.

Pensemos em termos clássicos, no caso de um corpo esférico de massa M situado na origem de um sistema de referência inercial, na qual o campo gravitacional é estudado com auxílio de uma partícula de teste de massa m desprezível, de modo que sua presença não altere o campo gravitacional estudado e que a força aplicada ao corpo de massa M não afete seu estado de repouso. Os movimentos desta partícula de teste, que são definidas pelas trajetórias cônicas previstas pelas leis de Kepler, são explicados pela teoria clássica da gravitação Newtoniana.

Em contra partida, a TGR explica os movimentos de uma maneira muito diferente: Uma partícula de teste está livre da ação de forças, e suas trajetórias em um campo gravitacional estão ligadas à geometria que o espaço-tempo adota na presença de um corpo de massa M .

Na TGR, o espaço e o tempo são concebidos em conjunto, como uma única variedade quadridimensional, ao qual recebe o nome de espaço-tempo. Este tendo sua estrutura geométrica condicionada pela presença de matéria, ou seja, quanto mais matéria um corpo possui, mais curvo é o espaço-tempo ao seu redor, e maior é seu campo gravitacional. Assim, o movimento de uma partícula de teste está condicionado à esta geometria.

Enquanto na teoria clássica, os movimentos de partículas livres de forças, e da ação gravitacional, são uniformes ao longo de trajetórias retilíneas, na TGR não existe partículas livres da ação gravitacional, uma vez que a presença de matéria está intimamente ligada aos efeitos gravitacionais. Assim, a gravidade não é tratada mais como uma força, mas como um condicionante da estrutura do espaço-tempo.

Os movimentos de partículas livres, agora, estão condicionados à curvatura do espaço-tempo, cujo seus caminhos não são mais linhas retas percorridas uniformemente, mas sim linhas geodésicas.

III. GEODÉSICAS E A CURVATURA DO ESPAÇO-TEMPO

Na TGR, a gravidade é representada pela curvatura do espaço-tempo. Assim, geodésicas são linhas de mundo de um corpo em queda livre cuja trajetória no espaço, e no tempo, tendem a uma reta, livre da ação de forças externas e que representam o caminho mais curto entre dois pontos em uma geometria pseudo-riemanianna.

A geodésica é dada pela expressão:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial s} \frac{\partial x^\beta}{\partial s} = 0 \quad (1)$$

Onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\zeta} (\partial_\alpha g_{\zeta\beta} + \partial_\beta g_{\zeta\alpha} - \partial_\zeta g_{\alpha\beta}) \quad (2)$$

O termo g representa o tensor métrico e transmite todas as informações sobre a estrutura causal do espaço-tempo. O termo $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ é o Símbolo de Christoffel, também chamado de conexão, e representa a medida de quanto um dado referencial não é inercial. Para uma melhor compreensão das equações acima, caso o leitor não tenha um entendimento de cálculo e notação indicial, é encorajado a consultar Thornton & Marion (2011), D'inverno (1992), e Ohanian & Ruffini (2013).

Se existissem seres vivendo em um mundo plano, bidimensional, nele haveria coordenadas cartesianas do tipo x_1 e x_2 , e o princípio da inércia nos diria que as partículas livres de forças se movem uniformemente em linhas retas dadas por funções lineares. No entanto, para seres vivendo em uma superfície esférica, tridimensional, o princípio de inércia nos diria que partículas livres de forças deveriam se mover em trajetórias uniformes que não se desviam para nenhum lado, no qual seriam os círculos máximos deste mundo esférico. Estas trajetórias circulares seriam o equivalente às linhas retas do mundo bidimensional, e recebem o nome de geodésicas.

Em uma superfície esférica não podemos usar a geometria euclidiana. Qualquer tentativa de colocar duas linhas retas vizinhas falharia, já que estas duas linhas inevitavelmente se cruzariam em algum momento quando prolongadas suficientemente. Além de muitas outras falhas na geometria euclidiana. E, como é fácil perceber, se o raio de curvatura tender ao infinito, o espaço se torna plano e se cumpre a geometria euclidiana.

Desse ponto de vista, os planetas não mais seguem uma trajetória elíptica com o sol em um dos focos dessa elipse exercendo uma força gravitacional a fim de mudar suas trajetórias retilíneas, como suponha newton. Nessa nova forma de enxergar a gravidade, a presença do Sol deforma o espaço-tempo na sua vizinhança e os planetas seguem suas trajetórias neste espaço tempo curvo. Essas trajetórias é bem semelhante às trajetórias forçadas da teoria newtoniana, mas não exatamente iguais. Embora a teoria newtoniana preveja órbitas fechadas, a posição do periélio não é fixa e flutua ao longo dos anos. A precessão de Mercúrio, por exemplo, calculada com base na mecânica clássica, resulta em uma precessão de 531 segundos de arco por século ($531'' = 8'51''$); enquanto que os dados observacionais indicaram

que era de 574 segundos de arco por século. Einstein, com a Relatividade Geral, conseguiu calcular essa discrepância de 43 segundos de arco por século que causava problemas.

Outra consequência da curvatura do espaço-tempo é que a luz também deve seguir trajetórias geodésicas. Logo, é natural pensar que a luz de uma estrela, que está logo atrás do Sol, chegue até nós desviada pela gravidade. Esse desvio na trajetória da luz de uma estrela foi observado, e confirmado, em 1919 durante um eclipse solar. A observação foi feita na cidade de Sobral, no Brasil, por uma das expedições organizadas por Sir Arthur Eddington.

IV. EQUAÇÃO DE EINSTEIN E A SOLUÇÃO EXATA DE SCHWARZSCHILD

Einstein revolucionou nosso entendimento do espaço e do tempo no ano de 1915, quando publicou seu trabalho: Os Fundamentos da Teoria Geral da Relatividade (Einstein, 1915); onde propôs uma teoria métrica da gravitação totalmente diferente de Newton, mostrando uma maneira diferente de compreender a gravidade.

As Equações de Einstein descrevem como a matéria deforma o espaço-tempo, ao mesmo tempo o espaço-tempo diz para a matéria com se mover. Ela é dada pela expressão:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi T_{\mu\nu} \quad (3)$$

Ou

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \quad (4)$$

Com

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (5)$$

Onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, definido como:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\beta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\tau; \quad (6)$$

$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento associado à matéria. Vale lembrar que não devemos confundir a equação (5) com a equação de Einstein, ela é apenas uma definição. $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ foi definido na equação (2).

Menos de um ano depois, em 1916, surgiram as primeiras soluções exatas para as equações de Einstein: A primeira delas foi obtida pelo Físico e Astrônomo alemão Karl Schwarzschild (1916), durante a Primeira Guerra Mundial, a qual descreve o campo gravitacional de uma distribuição esférica e homogênea de matéria sem carga, sendo uma solução de vácuo para um campo simetricamente esférico e estático que leva, naturalmente, à existência de objetos tipo buracos negros.

Schwarzschild chegou na seguinte solução

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (7)$$

Onde $\frac{2GM}{c^2} = r_s$ é o Raio de Schwarzschild, e define o horizonte de eventos de um buraco negro.

V. BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD E SUAS CONSEQUÊNCIAS

De forma simples, podemos definir um buraco negro como: Uma região no espaço-tempo onde o campo gravitacional é tão intenso que nada pode escapar, nem mesmo a radiação eletromagnética como a luz. A primeira solução exata da relatividade geral que descreve um Buraco negro foi obtida por Karl Schwarzschild, em 1916, menos de um ano após a publicação de Einstein. Mas, eles foram, por muito tempo, considerados como uma simples curiosidade matemática, e só foram voltar ao cenário por volta de 1967 com a descoberta das estrelas de nêutrons (objetos compactos, super densos, cuja sua composição é quase inteiramente nêutrons).

Espera-se que o colapso de estrelas supermassivas, no final de suas vidas, dê origem aos chamados Buracos Negros Estelares. A pós sua formação, o Buraco Negro pode continuar absorvendo outras estrelas, poeiras cósmicas e até

mesmo se fundir com outros buracos negros, formando os chamados Buracos Negros Super Massivos com milhões de massas solares. Acredita-se que no centro da maioria das galáxias encontra-se um Buraco Negro Super Massivo, incluindo a Via Láctea, cujo seu buraco negro central recebe o nome de Sagittarius A*.

O buraco negro de Schwarzschild é o mais “básico” dentre as soluções das Equações de Campo de Einstein, sendo sem carga elétrica e sem momento angular, ou seja, sem rotação. Esta é uma solução de vácuo e nos dá conta do que ocorre em um distancia infinitesimal r do centro da distribuição de massa, onde o tensor energia-momento é igual a zero.

$$T_{\mu\nu} = 0$$

A. Raio de Schwarzschild e o Horizonte de Eventos

O raio de Schwarzschild (r_s) é um raio associado a todo corpo material. Ele surge naturalmente da solução de Schwarzschild.

O r_s é proporcional a massa do objeto, não tendo nenhuma relação com o volume que essa massa ocupa, e é dado pela expressão:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{8}$$

Onde G é a constante gravitacional que surge na teoria newtoniana, e c é a velocidade da luz no vácuo. Um Objeto cujo sua massa está concentrada em uma região menor que seu r_s é considerado um buraco negro.

Como exemplo, vamos calcular os Raios de Schwarzschild para o Sol* e para a Terra.

A massa do Sol é de aproximadamente $1,989 * 10^{30} \text{ kg}$; $G = 6,67 * 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ e $c^2 = 8.98755 * 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

Logo, para o Sol

$$r_{s*} = \frac{2 * \left(6,6742 * 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \right) * (1,989 * 10^{30} \text{ kg})}{\left(8.98755 * 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right)}$$

$$r_s \approx 2,954 \text{ km}$$

A massa da terra é aproximadamente $5,974 * 10^{24} \text{ kg}$, logo:

$$r_{sT} = \frac{2 * \left(6,6742 * 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \right) * (5,974 * 10^{24} \text{ kg})}{\left(8.98755 * 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right)}$$

$$r_{sT} \approx 9 \text{ mm}$$

Assim, podemos concluir que, se pudéssemos comprimir toda a massa do Sol em um raio menor que $2,9 \text{ km}$, teríamos um pequeno buraco negro. Obviamente, como já foi dito, esse “buraco negro” não mudaria nada na dinâmica dos corpos que o orbita, já que a quantidade de matéria que estaria deformando o espaço-tempo é a mesma do Sol, apenas não iríamos mais receber a luz e o calor vindos do Sol (acabando com a vida na terra como a conhecemos).

O que caracteriza todo e qualquer Buraco Negro é o surgimento do Horizonte de Eventos (HE). O HE é a fronteira do limite do r_s , e recebe este nome pois qualquer evento que aconteça dentro dos limites dele não pode ser observado por um observador externo. Também é chamado de ponto de não retorno, uma vez que nada pode voltar a partir daqui, nem mesmo a luz, como ilustrado na figura 1:



FIGURA 1. Movimento de uma partícula nas proximidades de um Buraco Negro. Fonte: Wikipedia.org

B. Dilatação do espaço-tempo próximo a uma distribuição de massa

Para um observador relativamente distante, um evento que ocorre nas proximidades do HE sofre de um efeito muito interessante. Os relógios na proximidade de um buraco negro parecem marcar a passagem de tempo mais lentamente do que os do observador distante, assim, um objeto que cai no BN parece diminuir de velocidade à medida que se aproxima do HE, até dar a impressão de estar parado pois leva um tempo infinito para alcançar o HE. A este efeito se dá o nome de dilatação gravitacional do tempo, e pode ser dada pela expressão:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} \quad (9)$$

onde T é a medida do tempo em uma distância infinita da distribuição de massa, e T_0 , o tempo próprio a uma distância R centro de massa dentro do campo gravitacional. Essa expressão mostra que infinitamente longe do campo gravitacional, $R \gg \frac{2GM}{c^2}$, temos $T_0 = T$, enquanto que quanto mais próximo do HE, $R \rightarrow \frac{2GM}{c^2}$, mais lentamente o tempo T_0 passa em relação a T .

Novamente, vamos imaginar que comprimimos o Sol até o seu raio de Schwarzschild, R_{S^*} , e observar como o tempo se comporta perto da superfície do Sol, R em T_0 , em comparação com o tempo de um ano na superfície da Terra, $T = 31536000s$. O raio do Sol é de aproximadamente 696.340 km

Utilizando a equação (9):

$$T_0 = 31536000s * \sqrt{1 - \frac{2 * \left(6,6742 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) * (1,989 * 10^{30} kg)}{\left(8,98755 * 10^{16} \frac{m^2}{s^2}\right) * 696.340.000,0m}}$$

$$T_0 = 31536000s * \sqrt{0,999995757}$$

$$T_0 = 31536000s * 0,999997878s$$

$$T_0 = 31535933,08$$

Assim, a diferença de tempo na superfície do Sol, e um observador na superfície da Terra, $T - T_0$, é de 66,92 segundos. Esse valor pode parecer pequeno, e realmente é de se espera este resultado, já que o raio R da superfície do Sol é muito maior do que o seu R_{S^*} . Mas, vamos entrar um pouco mais no campo gravitacional deste pequeno buraco negro, até uma distância $R = 2R_{S^*}$

$$T_0 = 31536000s * \sqrt{1 - \frac{2954,082881}{2(2954,082881)}}$$

$$T_0 = 15768000s$$

e a diferença, $T - T_0$, agora, vai ser de 15768000s, ou seja, 0,5 anos.

Vemos, então, que quanto mais perto da distribuição de massa, mais devagar o tempo passa. Nós, na Terra, não sentimos diretamente os efeitos da dilatação do tempo, mas, os satélites de GPS sim. Como os satélites estão em alta velocidade, eles sentem a dilatação do tempo devido ao Princípio de Equivalência da Relatividade¹, fazendo com que seus relógios internos atrasem em milionésimos de segundos. Assim, para ter uma localização precisa, os equipamentos precisam ser calibrados diariamente, caso contrário, os caminhos exibidos teriam uma imprecisão de mais de 9 Km por dia.

¹ O princípio da equivalência estabelece a equivalência entre um campo gravitacional uniforme e um referencial acelerado.

C. Desvio para o vermelho (Redshift) gravitacional

Um outro efeito muito interessante previsto para TGR, é o deslocamento das linhas espectrais, devido a presença de uma fonte de campo gravitacional. Obviamente esse efeito acontece na presença de qualquer distribuição de massa, porem seu efeito é bem mais acentuado quando aplicamos a um Quasar, por exemplo.

Quasares são buracos negros supermassivos ativos, ou seja, que tem a matéria (gases e poeira) presente no seu disco de acreção acelerada e eventualmente engolida. Essa matéria atingi uma altíssima velocidade e temperatura, emitindo uma quantidade colossal de energia em forma de pulsos eletromagnéticos. Esses são os maiores emissores de energia do universo.

Evitaremos entrar nos detalhes matemáticos. Tomando a Solução de Schwarzschild, considerando dois eventos cujo deslocamento espacial é nulo, nosso elemento de linha assume a forma:

$$ds^2 = c^2 d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2$$

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dt \quad (10)$$

Que é a nossa definição de tempo próprio, equação (9), onde $m = \frac{GM}{c^2}$

Imaginemos um átomo qualquer. Quando excitado, este deve emitir um fóton com uma frequência específica que o caracteriza. A frequência ω_0 deste fóton pode ser dada pela derivada temporal da função de onda Ψ .

$$\omega_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (11)$$

Agora, vamos colocar este átomo excitado perto de uma fonte de campo gravitacional, o nosso buraco negro de Schwarzschild, com r_1 . Consideremos, então, que nosso átomo está emitindo fótons com frequência ω_1 no tempo próprio do átomo. Logo, um observador aqui na terra, em r_2 , deve enxergar esse átomo com uma frequência ω_2 , com o tempo dilatado.

Assim, se tomarmos a fração entres as frequências, teremos:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)_2}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)_1} \quad (12)$$

Tomando a regra da cadeia, e organizando os termos, chegamos em:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_2}{\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_1} \quad (13)$$

Substituindo a equação (10), em (13):

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2m}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

Levando em conta que $\frac{2m}{r_1} \ll 1$, podemos tomar uma expansão em série de Taylor do termo da direita, e descartar termos de ordem dois. Assim

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx \left(1 - \frac{2m}{r_1}\right) \left(1 + \frac{2m}{r_2}\right)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 1 - \frac{2m}{r_1} + \frac{2m}{r_2} \quad (15)$$

Voltando em $m = \frac{GM}{c^2}$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \sim 1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} + \frac{2GM}{c^2 r_2} \quad (16)$$

E considerando que, pelo fato de o observador estar muito longe da fonte de campo gravitacional, este não sente nenhuma influência do mesmo. Assim, $\frac{2GM}{c^2 r_1} \gg \frac{2GM}{c^2 r_2}$, e podemos desconsiderar o termo em r_2 .

Logo:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}$$

E fazendo alguns tramites matemáticos:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \approx -\frac{2GM}{c^2 r_1}$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \approx -\frac{2GM}{c^2 r_1}$$

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \left(-\frac{2GM}{c^2 r_1}\right) \omega_1 \quad (17)$$

Assim, chegamos a uma expressão que nos diz a variação na frequência de um fóton visto por um observador distante da fonte de campo gravitacional da fonte de emissão.

VI. UMA ULTIMA CURIOSIDADE

Obviamente, como buracos negros não emitem nenhum tipo de radiação, não podemos observá-los diretamente com telescópios óticos convencionais. No entanto, devido ao seu grande campo gravitacional, podemos fazer certas medidas do movimento de estrelas que orbitam estes tipos de objetos. Assim, podemos fazer, de forma indireta, medidas de sua massa, momento e raio.

Mais recentemente, cientistas foram capazes de detectar as ondas gravitacionais, que até pouco tempo atrás eram apenas previsões da teoria de Einstein, mas não vamos entrar neste tema. Também já somos capazes de imagear buracos negros detectando, com radiotelescópios, a radiação eletromagnética emitida pelo disco de acreção, como foi o caso da colaboração internacional “Event Horizon Telescope” (EHT), que imagearam os buracos negros Sagittarius A* da nossa galáxia, e do M87*, na galáxia M87.

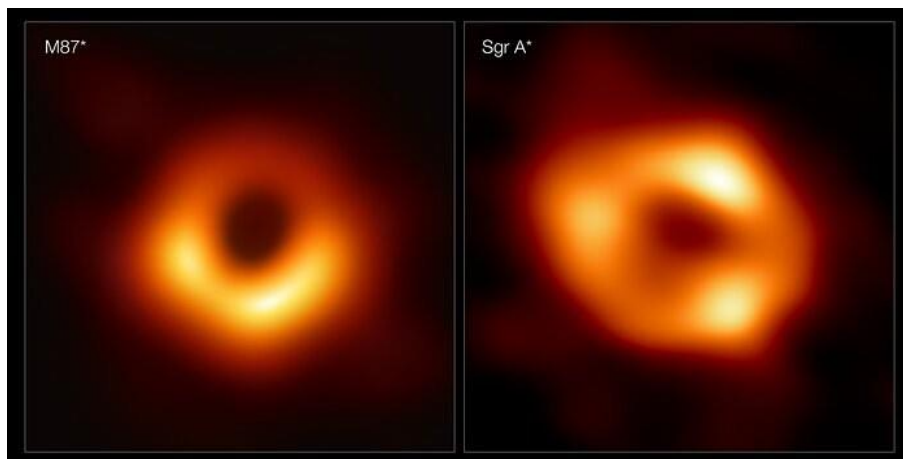


FIGURA 2. À esquerda está M87*, o buraco negro supermassivo M87* no centro da galáxia Messier 87, a 55 milhões de anos-luz de distância. À direita está Sagitário A* (Sgr A*), o buraco negro no centro da Via Láctea. Fonte: Colaboração EHT.

VIII. CONCLUSÕES

A TGR é, sem dúvidas, uma das maiores conquistas da mente humana (D'inverno, 1992), desde Newton. É uma teoria que tem se mostrado estar em perfeito acordo com a natureza, desde sua primeira comprovação. Assim, o objetivo deste trabalho foi mostrar, de forma objetiva, que podemos utilizar de conceitos da TGR, sem nos apegar ao formalismo matemático pesado e ao rigor das demonstrações, de forma que professores possam trabalhar, até mesmo com os alunos no ensino médio, sem tornar tudo cansativo e intimidador.

Como pudemos observar, os buracos negros não são nenhum bicho de sete cabeças como muitos pensam, e que, ao mesmo tempo, efeitos fascinantes ocorrem em suas vizinhanças.

Buracos Negros não são ralos astronômicos que saem engolindo tudo que vêm pela frente. Um objeto pode orbitar um buraco negro tranquilamente, com uma velocidade angular devida, sem que cai no horizonte de eventos. Obviamente, as condições, nas proximidades de um buraco negro ativo, são caóticas devido a grande quantidade de radiação, gás e poeira incandescentes presente no disco de acreção. E são esses eventos que propiciam as condições para que os cientistas possam estudar e interpretar de maneira mais elaborada o que significa a relatividade.

REFERENCIAS

Thornton, S. T. & Marion, J. B. (2011). *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*. Tradução da 5ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning.

Einstein, A. (1915). Die Grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 49, 769-822.

Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 189–196.

D'inverno, R. (1992). *Introducing Einstein's Relativity*. USA: Oxford University Press.

Ohanian, H. C. & Ruffini, R. (2013). *Gravitation and Spacetime*. Cambridge: Cambridge University Press.