

# La matematización de los vínculos en un problema de mecánica

## The mathematization of constraints in a classical mechanics problem

Laura Chiabrandó<sup>1\*</sup>, Francisco Kenig<sup>2</sup>, Marisol Montino<sup>3</sup>, Silvia Margarita Pérez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires. Av. Paseo Colón 850, CP 1063, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

<sup>2</sup>Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento. J. M. Gutiérrez 1150, CP 1613, Buenos Aires, Argentina.

<sup>3</sup>Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento. J. M. Gutiérrez 1150, CP 1613, Buenos Aires, Argentina.

\*E-mail: [lchiabra@fi.uba.ar](mailto:lchiabra@fi.uba.ar)

### Resumen

Se presentan los resultados de una investigación cualitativa que indaga cómo estudiantes de nivel universitario resuelven un problema sobre el movimiento de cuerpos vinculados por una soga ideal. El interés se centra en las restricciones cinemáticas que imponen los vínculos porque éstas implican la construcción de relaciones matemáticas en distintos registros semióticos que dan cuenta del sistema físico. En este trabajo se describen las restricciones de vínculo que las y los estudiantes escriben para resolver esta situación y se analizan los casos en los que hay un registro escrito donde se evidencia la interacción entre las representaciones matemáticas y el sistema físico. El análisis de los datos permite describir las características particulares del uso y la matematización de los vínculos. Asimismo, la escritura matemática de los vínculos en conjunto con el monitoreo de los resultados parciales, son las herramientas que posibilitan a las y los estudiantes avanzar en las resoluciones.

**Palabras clave:** Aprendizaje; Restricciones de vínculos; Representaciones semióticas; Mecánica; Nivel superior.

### Abstract

This paper presents the results of a qualitative investigation that explores how university students solve a problem involving the motion of bodies connected by an ideal rope. The focus is on the kinematic constraints imposed, as these require the construction of mathematical relationships in different semiotic registers that represent the physical system. This study describes the constraints that students write to solve this situation and the cases that show interaction between mathematical representations and the physical system. The analysis of the data allows us to describe the particular characteristics of the use and mathematization of the constraints. Furthermore, the mathematization of the constraints, together with the monitoring of the partial results, are the tools that enable the students to progress in the resolutions.

**Keywords:** Learning; Constraints; Semiotic representations; Mechanics; University.

## I. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas tiene un lugar central en el aprendizaje de la Física (Couso, Izquierdo y Merino Rubilar, 2008). Para resolver un problema de mecánica es necesario aplicar los principios físicos a ese caso particular y reconocer las restricciones que imponen las características del sistema y el entorno. En función de lo que se propone, puede resultar conveniente plantear la situación desde un enfoque dinámico o energético. Más allá de esta decisión, para completar el planteo es necesario reconocer los vínculos cinemáticos que restringen el movimiento del sistema. En este trabajo llamaremos reglas a las expresiones matemáticas que se obtienen al aplicar los principios o definiciones de la Física a una situación particular. En contraposición a las reglas, las restricciones cinemáticas de los vínculos son relaciones matemáticas que hay que construir para cada situación. Para el caso de problemas en los que hay cuerpos vinculados, según el enfoque elegido, es necesario vincular distintas magnitudes: para el enfoque dinámico interesa relacionar las aceleraciones de los objetos mientras que para el enfoque energético se deben relacionar velocidades y desplazamientos.

En un trabajo anterior (Chiabrande, Kenig, Montino y Pérez, en prensa) se analizó cómo resuelven estudiantes de nivel universitario un problema en el que se presenta una máquina de Atwood con una polea y sogas ideales. Con el interés de conocer el enfoque que utilizarían las y los estudiantes, en el enunciado se dieron más datos de lo que es necesario para resolver el problema. En las resoluciones encontramos un resultado no esperado: hubo estudiantes que respondieron correctamente las preguntas como si se tratara de objetos independientes, sin escribir las ecuaciones de vínculo.

A partir de ese resultado, en este trabajo se pone el foco en el entramado de matemática y física para la construcción de las restricciones que imponen los vínculos. Para ello se presenta el mismo enunciado que describe la máquina de Atwood, pero se proponen preguntas que pueden responderse utilizando sólo los vínculos; si se comprenden las restricciones cinemáticas del sistema no es necesario utilizar ninguna regla. Este problema presenta la dificultad de construir una relación matemática para los vínculos, en particular la relación entre las posiciones de los objetos, y de leer los datos de una tabla que da información sobre un objeto cuando se pregunta sobre el otro. Los objetivos que nos planteamos para este artículo son: describir cuáles son los vínculos que las y los estudiantes escriben y/o usan para resolver esta situación problemática y analizar los casos en los que haya un registro escrito donde se evidencie la interacción entre las representaciones matemáticas y el sistema físico.

## II. ENCUADRE TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En el proceso de resolución de un problema de física las y los estudiantes deben realizar tareas de identificación del sistema físico y reconocimiento de los conceptos y relaciones pertinentes (Carcavilla Castro y Escudero Escorza, 2004). Se trata de elegir el modelo adecuado y, con él, el conjunto de reglas o representaciones matemáticas de los principios físicos para describir la situación planteada (Buteler y Gangoso, 2003). Pero además, deben poder interpretar las restricciones y utilizar las expresiones matemáticas que ajustan las reglas al caso particular. Ese conjunto de expresiones escritas en lenguaje matemático permite resolver un problema e interpretar los resultados.

Las restricciones que expresan los límites físicos de la situación particular son inherentes a cada situación y, por lo tanto, quien resuelve debe interpretarla y hacer un cambio de representación del sistema físico a expresiones matemáticas o simbólicas. Es de hacer notar que las reglas son, en cierta forma, generales para cada modelo y vienen dadas por él una vez seleccionado. En cambio, la escritura matemática de las restricciones físicas debe ser “creada” por quien resuelve.

Duval (2006) afirma que el trabajo de ida y vuelta entre los distintos registros semióticos de representación es lo que produce conocimiento. Los cambios entre esos registros, por ejemplo, del lenguaje natural al esquema, del gráfico a la tabla, de las ecuaciones al gráfico, del gráfico al lenguaje natural, son característicos de la resolución de problemas en física. Cada cambio de representación y los resultados del trabajo de tratamiento o resolución dentro de cada representación producen resultados que pueden ser monitoreados desde el sistema físico. Estas situaciones de control, o de falta de él, son las que dan cuenta de las relaciones entre los conceptos matemáticos y los conceptos físicos que puede establecer la persona que está resolviendo un problema.

Respecto de la metodología, esta indagación de tipo cualitativo propone dar cuenta de cómo un grupo de estudiantes de nivel universitario utilizan las restricciones que imponen los vínculos en un problema de mecánica, realizando un análisis descriptivo de los datos (Taylor y Bogdan, 1996).

En este estudio se analizan los registros escritos que se encuentran en la resolución de un problema cerrado sobre la máquina de Atwood. El instrumento utilizado para esta indagación se construyó a partir de un trabajo anterior

(Chiabrandó *et al.*, en prensa). En función de los resultados obtenidos en el estudio antecedente, se decidió adaptar las preguntas utilizando aquellas consignas en las que se observó un mayor uso de las restricciones de vínculo. En la Figura 1 se muestra la situación presentada a las y los estudiantes. Cabe aclarar que si bien este sistema es trabajado en las clases del curso donde se tomaron los registros, los datos presentados en el enunciado y las preguntas formuladas difieren de las que se realizan usualmente.

**Situación**

Un bloque A está unido a un bloque B por una soga que pasa por una polea. La masa del bloque A es de 6 kg y la del bloque B es de 2 kg.

En la figura se muestra la situación inicial, donde los bloques están en reposo: el bloque A está a una altura de 0,8 m (H) y el B está apoyado en el piso.

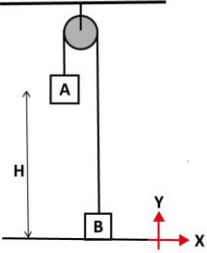
La soga que une los bloques es inextensible, esto significa que lo que baja el bloque A es igual a lo que sube el bloque B.

También se puede considerar que la polea y la soga tienen masa despreciable, por lo que la tensión que ejerce la soga en cada uno de los bloques es igual. Esta fuerza vale 30 N.

Considerar que  $|g| = 10 \frac{m}{s^2}$

En la siguiente tabla se indica la rapidez del bloque A en distintas alturas

Altura del bloque A	Rapidez del bloque A
0,1 m	$\sqrt{7} \text{ m/s} \approx 2,65 \text{ m/s}$
0,2 m	$\sqrt{6} \text{ m/s} \approx 2,45 \text{ m/s}$
0,4 m	2 m/s
0,6 m	$\sqrt{2} \text{ m/s} \approx 1,41 \text{ m/s}$
0,7 m	1 m/s



a) ¿Cuál es la variación de la velocidad del bloque B cuando pasa de una altura de 0,1 m a 0,6 m?

b) ¿Te parece razonable este resultado? ¿Por qué?

c) Conocé otra manera de comprobar si este resultado es correcto? Si es así, por favor explicala.

FIGURA 1. Situación planteada a las y los estudiantes.

El cuestionario fue tomado de manera individual y anónima a 17 estudiantes de la asignatura Física I de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires durante el segundo cuatrimestre del 2023. La toma de datos se realizó después del primer parcial, en el que se evalúan conocimientos de mecánica (cinemática, dinámica y energía) para describir situaciones dentro de los modelos de cuerpo puntual, sistema de partículas y cuerpo rígido.

El análisis de los datos se basó en la lectura sistemática y cíclica de los registros, seleccionando segmentos significativos que se compararon y contrastaron para sintetizar y organizar la información (Hopkins, Bollington y Hewett, 1989). De esta forma, el análisis inductivo posibilitó la presentación de una síntesis descriptiva sobre el uso de las restricciones y una selección de casos en los que se puede reflexionar sobre el entramado de la matemática y la física (Sirvent y Rigal, 2023).

### III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

La primera pregunta planteada puede contestarse de manera directa utilizando las restricciones cinemáticas impuestas por el vínculo de la soga y los datos de la tabla; esta resolución es corta y requiere un tratamiento matemático que involucra restas y la lectura de la tabla. También puede contestarse a partir de planteos dinámicos y cinemáticos o en el marco de la energía mecánica; en estos casos el tratamiento matemático es más extenso. La

segunda pregunta se puede contestar con palabras a partir del análisis del resultado numérico obtenido en la primera pregunta en conjunto con el análisis de la situación planteada, no requiere realizar ningún tipo de resolución extra. La tercera pregunta también puede contestarse solo con lenguaje natural; esta pregunta permite chequear si reconocen otras estrategias de resolución posibles.

**A. Análisis del uso de restricciones en la primera pregunta**

En las resoluciones se encontraron tres estrategias para contestar la primera pregunta. De las 17 respuestas se encontró que 10 abordan la resolución a partir de las restricciones impuestas por el vínculo de la sogá, cuatro con un enfoque dinámico y cinemático y tres por energía.

*Estrategia de resolución a partir de las restricciones impuestas por el vínculo de la sogá*

En la situación planteada, a partir de escribir el largo de la sogá inextensible, se pueden deducir tres restricciones cinemáticas al movimiento de los cuerpos vinculados. Las vamos a llamar:

- *restricción de posición*, que relaciona la posición de los cuerpos A y B mediante la siguiente ecuación:

$$y_A = 0,8 m - y_B \quad y_A = 0,8 m - y_B \tag{1}$$

- *restricción de velocidad*, que relaciona las velocidades de ambos cuerpos mediante la siguiente ecuación:

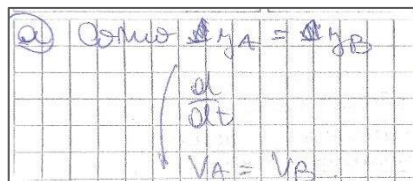
$$v_A = -v_B \quad v_A = -v_B \tag{2}$$

- *restricción de aceleración*, que relaciona las aceleraciones de ambos cuerpos mediante la siguiente ecuación:

$$a_A = -a_B \quad a_A = -a_B \tag{3}$$

Estas restricciones también se pueden construir o “imponer” considerando el movimiento del sistema físico y sin recurrir a la escritura matemática del largo de la sogá. Esta estrategia de resolución posibilita contestar la pregunta solo a partir de las restricciones y sin tener que utilizar ninguna regla.

De las 10 resoluciones que utilizan la estrategia a partir de las restricciones que impone el vínculo de la sogá, se encuentra que dos son incorrectas. En ambos casos el error radica en considerar iguales las posiciones de ambos cuerpos. Un ejemplo de esto puede verse en la Figura 2, donde se puede notar el intento de relacionar los desplazamientos de los cuerpos y luego se tacha para trabajar con posiciones iguales.



**FIGURA 2.** Respuesta Estudiante 6.

En las 8 resoluciones correctas dentro de esta estrategia se usa apropiadamente la *restricción de posición*. No se encuentra ningún caso en que se escriba mediante una ecuación la posición del cuerpo A en función de la del cuerpo B. Sin embargo, esta relación aparece expresada con otras representaciones semióticas: en forma de esquema gráfico, en forma de tabla o relacionando el desplazamiento de los cuerpos tanto en lenguaje natural como en forma de ecuación (Figura 3).

$$\Rightarrow y_a \text{ que al ser sogá inextensible } \Delta y_A = \Delta y_B$$

**FIGURA 3.** Respuesta Estudiante 11.

Respecto a la relación de velocidades, en todas las resoluciones se trabaja numéricamente de manera correcta. Además, en cinco resoluciones se escribe la *restricción de velocidad* mediante alguna representación semiótica y en tres resoluciones se deduce a partir de otras expresiones (Figura 4).

$$\Rightarrow a_{Ay} = -a_{By}$$

$$\boxed{N_{Ay} = -N_{By}}$$

$$\boxed{-N_{Ay} = N_{By}}$$

FIGURA 4. Respuesta Estudiante 2.

*Estrategia de resolución a partir de un análisis dinámico y cinemático*

Es importante señalar que, al haber incorporado como dato el valor de la tensión, las resoluciones por dinámica y cinemática pueden realizarse de manera completa sin utilizar la *restricción de aceleración* impuesta por el vínculo de la soga, ya que se podía calcular la aceleración de cada cuerpo por separado.

En dos resoluciones no se utiliza ninguna restricción ya que se plantea el análisis de los cuerpos de manera independiente. En ambos casos se despeja de manera independiente, a partir de la segunda ley de Newton, la aceleración de cada cuerpo y luego se trabaja solamente con uno ellos.

A pesar de no ser necesario, en dos resoluciones se utiliza la *restricción de aceleración* en el planteo. En una se deduce la restricción a partir de escribir el largo de la soga y luego se abandona la resolución del problema. En la otra se impone que las aceleraciones de los dos cuerpos son iguales en módulo y sentido. Por lo tanto, el valor que se obtiene para la aceleración es el de la aceleración de la gravedad; luego de recuadrar este resultado se abandona la resolución. De las cuatro resoluciones en las que se utiliza esta estrategia, en ningún caso se llega al resultado correcto.

*Estrategia de resolución a partir de un análisis energético*

Al haber incorporado como dato el valor de la tensión en el enunciado, las resoluciones a partir de consideraciones energéticas de cada cuerpo de manera independiente pueden realizarse sin utilizar las restricciones cinemáticas impuestas por el vínculo de la soga. En cambio, en una resolución que analice la conservación de la energía del sistema, es necesario el uso de las restricciones de posición y velocidad.

En dos resoluciones no se utilizó ninguna restricción: en un caso porque se plantea incorrectamente la conservación de la energía para un solo cuerpo y en el otro porque no se avanza más allá de proponer la conservación de la energía del sistema.

En la resolución restante se plantea la conservación de la energía del sistema y se utiliza la *restricción de posición* de manera correcta; pero no se identifica la *restricción de velocidad*, recurriendo a valores arbitrarios de la tabla para llegar a un resultado numérico.

Ninguna de las tres resoluciones en las que se aborda el problema a partir de un análisis energético llega al resultado correcto.

**B. Análisis de la segunda y tercera pregunta**

La segunda pregunta fue contestada por nueve personas. Todas consideran razonable el resultado obtenido en la primera pregunta. En ocho respuestas se contesta en lenguaje natural y en una se vuelve a resolver la primera pregunta con otra estrategia y se comparan los resultados. Para argumentar la razonabilidad del número obtenido recurren a diferentes características del sistema: que el peso del cuerpo A es mayor al del cuerpo B, el sentido y valor de la aceleración del cuerpo B o que cuando el cuerpo A baja el B sube.

Sólo cinco personas proponen una estrategia de resolución alternativa como respuesta a la tercera pregunta. Todas ellas utilizaron la estrategia de resolución a partir de las restricciones cinemáticas y propusieron como estrategia alternativa trabajar con los teoremas de trabajo y energía. Es interesante señalar que ninguna de las respuestas en las que se utilizaron las estrategias de dinámica y cinemática o energía reconoció la estrategia de restricciones como alternativa.

**C. Descripción de casos particulares**

A continuación, describiremos en detalle cuatro casos seleccionados debido al interés de estas resoluciones en relación con los objetivos planteados.

El primer caso analizado, que corresponde a la resolución 4, es interesante dada la validación planteada por caminos independientes, haciendo uso de las herramientas de la teoría y aplicando diferentes representaciones para resolver y validar el resultado. La estrategia que elige es plantear correctamente la restricción que impone el vínculo de la soga, argumentando con palabras tanto sobre la igualdad del módulo de los desplazamientos de ambos cuerpos, como la restricción resultante de la velocidad y de la aceleración. Luego usa los datos de la tabla proporcionada en el enunciado y obtiene el resultado correcto. Ante la pregunta sobre si el resultado le parece razonable, elige corroborar en forma totalmente independiente ese resultado. Plantea las ecuaciones de Newton para ambos cuerpos y llega a que las aceleraciones en módulo son iguales, señalando que “esto ya es un buen indicio”. Esa afirmación muestra que tiene presente la *restricción de aceleración*. Aun así, manifiesta “quiero corroborar las velocidades”. Plantea la ecuación de posición del cuerpo B y calcula el tiempo para los dos puntos señalados en el enunciado. Con esos datos calcula el intervalo de tiempo que tarda el cuerpo B en desplazarse de una a otra posición. Es interesante observar que, haciendo uso del significado de la aceleración constante (variación de la velocidad en el intervalo de tiempo) y con un planteo del tipo regla de tres, obtiene el resultado de la variación de la velocidad pedida (Figura 5).

$\Delta t = 0,29 \text{ s}$

$\frac{5\text{m}}{3} = 1 \text{ s}$

$\frac{1,45\text{m}}{3} = x - 0,29 \text{ s} \quad \checkmark \quad \text{Es razonable}$

FIGURA 5. Respuesta Estudiante 4.

El planteo y la resolución del problema muestran que la persona domina tanto las reglas como la matemática involucrada. Es incluso llamativo el uso de la definición de aceleración. En su resolución se advierte que, aun llegando por el camino más corto al resultado pedido, se preocupa por validar en forma totalmente independiente su resultado. Lo que se pide es argumentar sobre su razonabilidad, lo que es interpretado por la mayoría de las personas participantes como una invitación a mirar la variación de la velocidad y justificar a través de su incremento. Sin embargo, en esta resolución se advierte una validación ajustada a las reglas de la lógica dado que, para realizarla, se utiliza un camino totalmente independiente sin el uso de los vínculos impuestos por la soga. Si bien no escribe el desarrollo de las ecuaciones de vínculo impuestas por la soga, explica claramente las consecuencias que esa restricción impone al sistema y usa con destreza esas relaciones para arribar a los resultados y su validación.

El segundo caso, correspondiente a la resolución 8, resulta interesante por el planteo explícito de tres estrategias, numerándolas. Aun así, el orden en que las desarrolla no es claro. Muestra también la validación del uso de la igualdad del módulo de las velocidades, que primero impone y luego deduce. En la primera estrategia, luego de una escritura poco clara de los desplazamientos y las velocidades, parece plantear que los incrementos de las velocidades deben ser los mismos, obviando que el signo debería ser diferente. Después plantea las ecuaciones de Newton para el sistema, pero al asignar el mismo signo a las aceleraciones llega a una contradicción: el valor de las masas debería ser el mismo. Escribe que ambas masas son distintas, y señala que no pudo resolver por ese camino, tal como se refleja en la Figura 6. Es interesante observar cómo la lectura de las ecuaciones le señala que hay un error en la resolución. A partir del reconocimiento de un error retoma la primera estrategia de resolución. Señala las posiciones de ambos cuerpos en el intervalo pedido utilizando el vínculo de las alturas y resuelve correctamente usando los datos de la tabla. Luego señala la segunda forma en que lo pensó, pasa a escribir el largo de la soga correctamente, deriva los términos y llega a que las velocidades de ambos cuerpos son iguales en módulo, pero de signo distinto (ver Figura 7). Parece querer mostrar la deducción, que antes no había hecho, de la asignación de velocidades iguales en módulo para ambos cuerpos. Aparece entonces, una intención de validar el uso de la relación que impone el vínculo de la soga en su resolución. Este caso muestra el papel del reconocimiento del error para orientar las resoluciones y la necesidad de validar formalmente las decisiones tomadas. El uso de los vínculos, primero asumido y luego desarrollado, muestra que tiene presente el sistema y sus restricciones a lo largo de toda su resolución.



$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

a) y)  $T_A - P_A = m_A \vec{a}$       b) y)  $T_B - P_B = m_B \vec{a}$

$$T_A - m_A \cdot g = m_A \cdot a$$

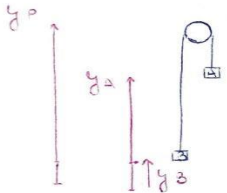
$$T_B - m_B \cdot g = m_B \cdot a$$

$m_A \neq m_B$

NO PUEDE  
DEMOSTRAR  
LO DE  
ESTA  
FORMA

FIGURA 6. Respuesta Estudiante 8.

SEGUNDA FORMA EN QUE LO PENSO:



$$L = y_P - y_B + \pi \cdot r + y_P - y_A$$

cte

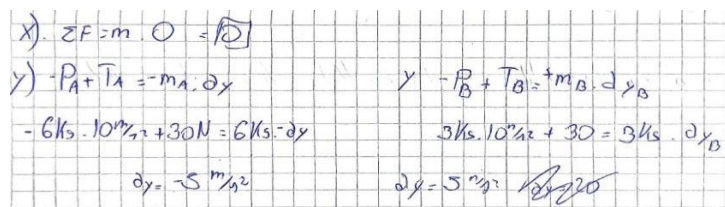
$$\frac{dL}{dt} = 0 = -v_B - v_A$$

$$\vec{v}_B = -\vec{v}_A$$

$$|v_B| = |v_A|$$

FIGURA 7. Respuesta Estudiante 8.

El tercer caso analizado, correspondiente a la resolución 10, resulta interesante dado que intenta resolver planteando las ecuaciones de Newton para ambos cuerpos. Un error en los signos y la lectura incorrecta del valor de una de las masas hace que obtenga dos valores de aceleraciones distintas. Tacha uno de los resultados e impone que son iguales en módulo y de distinto signo tal como se ve en la Figura 8. Parece haber monitoreado lo que implica el vínculo con su resultado. Es interesante que elige el valor correcto, quizás descartando el otro porque el valor obtenido es mayor que el de la aceleración de la gravedad, lo que puede sugerir que tiene presente el sistema físico que, al ser de cuerpos vinculados, tiene una restricción en el valor posible de la aceleración. Sin embargo, no continúa la resolución por ese camino. Plantea el problema usando la expresión de la energía para el sistema, aunque luego usa incorrectamente la conservación de la energía para el cuerpo B. Se observa como un resultado no esperado, en el que las aceleraciones no son iguales, hace que opte por una estrategia de resolución diferente. Parece indicar que la información sobre lo que implica el vínculo prima por sobre los resultados obtenidos.



x)  $\sum F = m \cdot 0 = P$

y)  $-P_A + T_A = -m_A \cdot a_y$       y)  $-P_B + T_B = m_B \cdot a_{y_B}$

$-6 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 30 \text{ N} = 6 \text{ kg} \cdot a_y$        $3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 30 = 3 \text{ kg} \cdot a_{y_B}$

$a_y = -5 \text{ m/s}^2$        $a_y = 5 \text{ m/s}^2$

FIGURA 8. Respuesta Estudiante 10.

En el cuarto caso, la resolución número 14 se inicia con el planteo de las ecuaciones de Newton para ambos cuerpos, incluyendo la fuerza normal sobre el cuerpo que está inicialmente apoyado, asignando aceleraciones distintas a cada cuerpo. No continúa por ese camino, quizás debido a que aparece como irresoluble al contener demasiados valores que no son datos. Elige otra estrategia, planteando correctamente las ecuaciones de conservación de energía del sistema, pero cuando debe reemplazar los valores, utiliza para las velocidades (inicial y final) del cuerpo A el primer y último valor de la tabla. Parece ser una lectura ingenua de los valores de la tabla, dado que la designación de velocidad final e inicial en la expresión de la energía cinética lleva a una interpretación de la tabla como completa, o sea que contiene todos los valores de velocidad del movimiento. Se observa en esta resolución un abandono de estrategia, quizás debido a que las ecuaciones planteadas resultan irresolubles. Es interesante observar que no hay ninguna alusión a las restricciones de velocidad impuestas por la soga. El uso de los vínculos en esta resolución no es consistente: mientras en alguna expresión los datos reemplazados parecen indicar que se están leyendo las posiciones de ambos cuerpos correctamente relacionadas, en otras expresiones no ocurre lo mismo.

#### IV. COMENTARIOS FINALES

El análisis de las resoluciones de la primera pregunta permite observar que quienes identificaron y pudieron utilizar las restricciones cinemáticas impuestas por el vínculo de la sogá, en su mayoría, resolvieron correctamente el problema planteado. En cambio, quienes se aferraron a las reglas, ya sean en el marco de la dinámica o de la energía mecánica, abandonaron la resolución o llegaron a un resultado incorrecto.

La *restricción de posición* no aparece escrita como ecuación en ninguna resolución, sin embargo, se la interpreta bien numéricamente y se la utiliza en forma correcta. En cambio, aparece la matematización de la *restricción de velocidad* en varias respuestas. La *restricción de posición*, que en este caso también es una relación entre las alturas de los cuerpos, pareciera ser intuitiva e incluso visual a partir del esquema dado en el enunciado. La *restricción de velocidad* tiene otro grado de abstracción e implica conocer cómo una sogá ideal limita el movimiento de dos cuerpos vinculados, tal vez por ello hay más estudiantes que deciden explicitarla mediante una ecuación.

El análisis de los casos seleccionados permite observar las situaciones de control que las y los estudiantes realizan entre el sistema físico y los resultados de aplicar las reglas y las restricciones que imponen los vínculos. El reconocimiento de un error, que obliga a corregir o cambiar la estrategia de resolución, y el desarrollo de justificaciones muestran la relación que las y los estudiantes pueden establecer entre los distintos registros de representación que dan cuenta del problema. El uso de las validaciones, la selección de estrategias y su abandono, y el uso de las relaciones de vínculo muestran el monitoreo entre representaciones matemáticas y sistema físico que es necesario para resolver un problema.

La disponibilidad de las herramientas de monitoreo y la posibilidad de cambios de registros de representación para interpretar los vínculos, aunque no se llegue al resultado correcto o se abandone la resolución, pueden tomarse como indicios de que las y los estudiantes han comenzado a recorrer el camino hacia la comprensión de este tipo de problemas.

#### AGRADECIMIENTOS

Este artículo fue elaborado en el marco del Proyecto UNGS Interinstitutos 30/5030, financiado por la Universidad Nacional de General Sarmiento.

#### REFERENCIAS

Buteler, L. y Gangoso, Z. (2003). La representación externa en la resolución de un problema de física: ¿una cuestión de forma o una cuestión de fondo? *Cognitiva*, 15(1), 51-66.

Carcavilla Castro, A. y Escudero Escorza, T. (2004). Los conceptos en la resolución de problemas de física “bien estructurados”: aspectos identificativos y aspectos formales. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 213-228. Recuperado de <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v22-n2-carcavilla-escudero/1791>.

Chiabrando, L., Kenig, F., Montino, M. y Pérez, S. M. (En prensa). El uso de reglas y restricciones en la resolución de un problema de mecánica: el rol de la matemática en la física. *Revista Ciência & Educação*.

Couso, D., Izquierdo, M. y Merino Rubilar, C (2008). La resolución de problemas. En C. Merino Rubilar, A. Gómez Galindo y A. Adúriz-Bravo (Coords.), *Áreas y Estrategias de Investigación en la Didáctica de las Ciencias Experimentales* (65-86). España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168. Recuperado de <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>.

Hopkins, D., Bollington, R. y Hewett, D. (1989). Growing up with qualitative research and evaluation. *Evaluation and Research in Education*, 3(2), 61-80.



Sirvent, M. T. y Rigal, L. (2023). *La investigación social en educación: diferentes caminos epistemológicos, lógicos y metodológicos de producción de conocimiento*. Barcelona: Miño y Dávila Editores.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1996). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.