REVISTA DE ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

VOLUMEN 36, NÚMERO 2 | JULIO-DICIEMBRE 2024 | PP. 143-160
ISSN: 2250-6101
DOI: https://doi.org/10.55767/2451.6007.v36.n2.47478


# Aclaraciones y recomendaciones didácticas sobre la naturaleza estadística y probabilística de la ley de desintegración radiactiva

## Clarifications and didactic recommendations about the statistical and probabilistic nature of the radioactive decay law

David Marqués Villarroya [1*]

[1] Departamento de Física y Química, IES José Vilaplana, Avinguda Gil d'Atrosillo, 26, 12500 Vinaròs, Castelló, España

***E-mail: d.marquesvillarroy@edu.gva.es**

Recibido el 29 de julio de 2024 | Aceptado el 4 de noviembre de 2024

**Resumen**

La ley de desintegración radiactiva tiene un comportamiento estadístico y probabilístico que a menudo es malinterpretado como un fenómeno plenamente determinista debido a una explicación superficial del proceso que no enfatiza su naturaleza aleatoria. El artículo se motiva por la necesidad de aclarar la presencia de la probabilidad y la estadística en este proceso, cuestión que no se trata habitualmente con la importancia que se merece y que genera dudas y errores de concepto entre los estudiantes y el propio profesorado de física. El objetivo del artículo es proporcionar al profesorado de física que trate con este fenómeno un modelado de la ley de desintegración radiactiva mediante un análisis cuantitativo, estadístico y probabilístico que aclare algunos conceptos comúnmente malinterpretados mediante un ejemplo didáctico. La incorporación de un modelo probabilístico y estadístico no solo clarifica la verdadera naturaleza estadística de este fenómeno físico, sino que también contribuye significativamente al desarrollo de las competencias científico-matemáticas en los estudiantes, permitiéndoles trabajar y comprender con mayor profundidad este proceso.

**Palabras clave:** Radiactividad; Ley de desintegración radiactiva; Estadística; Probabilidad; Modelado experimental.

**Abstract**

The radioactive decay law has a statistical and probabilistic behavior that is often misinterpreted as a fully deterministic phenomenon due to superficial explanations of the process that fail to emphasize its random nature. This article is motivated by the need to clarify the role of probability and statistics in this process, a topic that is usually not given the importance it deserves, and which leads to conceptual doubts and misunderstandings among both students and physics educators. The article's goal is to provide physics educators working with this phenomenon with a model of the law of radioactive decay through a quantitative, statistic and probabilistic analysis that clarifies commonly misunderstood concepts using a didactic example. The incorporation of a probabilistic and statistics model not only clarifies the true statistical nature of this physical phenomenon but also significantly contributes to the development of students' scientific and mathematical skills, enabling them to engage with and understand this process in greater depth.

**Keywords:** Radioactivity; Radioactive Decay Law; Statistic; Probability; Experimental modelling.

## I. INTRODUCCIÓN

La radiactividad natural es un fenómeno fundamental de la naturaleza, donde ciertos elementos químicos emiten espontáneamente partículas y energía debido a la inestabilidad de sus núcleos atómicos. Esta inestabilidad se presenta en elementos cuyos núcleos (formados por protones y neutrones) no pueden mantenerse unidos por la fuerza nuclear fuerte y, para estabilizarse, emiten partículas y energía. Estos elementos se desintegran de forma natural, emitiendo radiación alfa, beta y gamma, y transformándose en otros elementos hasta alcanzar una configuración más estable (Alonso & Finn, 1986). Existen formas de radiación indirectas, formadas por partículas no cargadas como fotones o neutrones, los cuales, al chocar con otros núcleos, pueden activarlos para que emitan radiaciones alfa, beta o gamma. Los mecanismos por los que se producen estas radiaciones no son objeto de este artículo, pero son ampliamente conocidos por las leyes de Soddy-Fajans y se pueden consultar en la bibliografía (Burcham, 2003).

La ley que modela a nivel macroscópico el fenómeno de la radiactividad natural es la ley de desintegración radiactiva. Este proceso ocurre de manera espontánea y aleatoria, por lo que se debe considerar como una ley de naturaleza estadística, donde la desintegración de un núcleo individual es impredecible (Krane, 1987). Aquí radica la diferencia con los procesos o leyes deterministas, donde los resultados pueden predecirse con certeza. Sin embargo, a pesar no poder determinar con exactitud la desintegración de un solo núcleo, cuando se considera un gran número de núcleos, emergen patrones predecibles descritos por modelos matemáticos (estadísticos) que permiten calcular el número de núcleos que quedan sin desintegrar en un material radiactivo después de un periodo determinado, basándose en la probabilidad de desintegración (Fernández de la Mora, 2002). Entender esta naturaleza estadística es crucial para evitar malentendidos y apreciar la aplicabilidad de las leyes probabilísticas en la explicación de fenómenos físicos (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2012).

Los errores conceptuales en esta temática no son eventuales, pues algunos trabajos como (Prather, 2005) describen varios tópicos falsos sobre la desintegración radiactiva que surgen entre estudiantes; y otros como (Yesiloglu, 2019) dan algunas evidencias sobre errores conceptuales de esta ley entre el propio profesorado. Aunque algunos trabajos de gran valor, como (Huestis, 2002) o (Mamane & Benjelloun, 2019), intentan dar una visión más realista del proceso estocástico de esta ley, no llegan a profundizar lo suficiente como para aclarar los conceptos que distinguen un proceso aleatorio de uno determinista.

Por lo tanto, debido a la falta de claridad y explicaciones en la bibliografía sobre el carácter probabilístico y estadístico de la ley de desintegración radiactiva, este artículo ofrece un estudio detallado de dicha naturaleza. Los conceptos estadísticos y probabilísticos necesarios para modelar esta ley se introducen y desarrollan de manera progresiva a lo largo del artículo para facilitar su comprensión. Además, se presenta un ejemplo didáctico para su aplicación en el aula, con el objetivo de proporcionar a los docentes de física un recurso útil para la explicación de este fenómeno.

## II. LEY DE DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

La desintegración radiactiva es un proceso estocástico (es decir, aleatorio) a nivel de átomos individuales. Según la teoría cuántica, es imposible predecir con exactitud cuándo se desintegrará un átomo particular (Tipler & Llewellyn, 2009). Sin embargo, para un conjunto de átomos se pueden establecer una serie de patrones y leyes estadísticas empíricas (Ehmann & Vance, 1991).

Para deducir la ley de desintegración radiactiva consideremos que, según observaciones empíricas producidas ya por Rutherford y Soody (Krane, 1987), la probabilidad de desintegración de cada núcleo por unidad de tiempo ($\lambda$) es constante en el proceso de desintegración radiactiva. La probabilidad de que un núcleo se desintegre en un tiempo infinitesimal ($dt$) es, por lo tanto, $\lambda \cdot dt$. Si hay $N$ núcleos presentes, podemos esperar que se desintegren $N \cdot \lambda \cdot dt$ núcleos ese tiempo. Por lo tanto, se puede definir la tasa de decaimiento radiactivo o actividad radiactiva ($A$) como la cantidad de núcleos desintegrados por unidad de tiempo (Burcham, 2003):

$$A = \lambda N \tag{1}$$

Por otra parte, el número de núcleos $N$ disminuirá según esta expresión (Burcham, 2003):

$$-dN = N \cdot \lambda \cdot dt \tag{2}$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior se obtiene que el número de núcleos radiactivos en una muestra viene dado por una ley de decaimiento exponencial, llamada ley de desintegración radiactiva (Burcham, 2003):

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{3}$$

Donde $N_0$ es el número de núcleos que tenía la muestra en el instante inicial; $N$ el número de núcleos radiactivos que quedan sin desintegrar (sobreviven) al cabo de cierto tiempo $t$; y $\lambda$ es la constante de desintegración radiactiva, que como hemos comentado anteriormente, modela la probabilidad de desintegración de un núcleo radiactivo por unidad de tiempo.

**A. Cálculo de la constante de desintegración radiactiva $\lambda$**

Un parámetro muy utilizado para medir la constante radiactiva ($\lambda$) es el tiempo de semidesintegración ($T_{1/2}$), que se corresponde con el tiempo que debe pasar para que el número de muestras radiactivas se reduzca a la mitad. De la expresión general de la ley de desintegración radiactiva (3) obtenemos:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \tag{4}$$

Y despejando de esta ecuación, podemos obtener una expresión para el tiempo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \tag{5}$$

Como el periodo de semidesintegración se puede medir empíricamente, la constante radiactiva viene dada por:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \tag{6}$$

Mediante esta expresión se calcula en la práctica la constante de desintegración radiactiva ($\lambda$).

**B. Estudio probabilístico del proceso de desintegración radiactiva**

La expresión general obtenida anteriormente de la ley de desintegración radiactiva (3) determina el número de núcleos que quedan o sobreviven ($N$) al cabo de un cierto tiempo, es decir, aquellos que no se desintegran. No obstante, no hay que olvidar que este número de átomos supervivientes ($N$) es una variable aleatoria (Ehmann & Vance, 1991), pues ya hemos comentado anteriormente que no se puede predecir con exactitud el momento exacto de desintegración de un núcleo. Por lo tanto, como toda variable aleatoria, necesita que precisemos, además de su valor, su probabilidad dentro del espacio muestral que la define (valores posibles de la variable aleatoria) (Fernández de la Mora, 2002).

Para abordar el estudio probabilístico del proceso de desintegración radiactiva debemos determinar el proceso aleatorio que sigue este fenómeno. Si observamos el proceso, podemos afirmar que se trata de un proceso discreto (ya que los núcleos son individuales) de sucesos independientes (pues suponemos que la desintegración de los núcleos no es influyente entre distintos átomos (Krane, 1987)), donde estudiamos la posibilidad de supervivencia o desintegración de un núcleo atómico, es decir, la posibilidad de éxito o fracaso de un proceso. Este tipo de distribuciones son las características de Bernoulli (Fernández de la Mora, 2002).

**C. Distribución binomial**

En un proceso de desintegración radiactiva queremos conocer la probabilidad de supervivencia ($P_N$) de $N$ núcleos partiendo de $N_0$ núcleos (número total de ensayos) al cabo de un cierto tiempo. La probabilidad de que esto suceda se corresponde con una distribución binomial, ya que se realizan $N_0$ ensayos independientes de Bernoulli, y es bien sabido que la distribución binomial no es más que una generalización de varios procesos independientes de Bernoulli (Huang, 1987). Por lo tanto, la probabilidad de obtener $N$ éxitos (núcleos supervivientes) viene dada por la expresión de probabilidad de una binomial:

$$P_N = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{N_0!}{N!(N_0-N)!} p^N q^{N_0-N} \tag{7}$$

Siendo, para el caso que nos ocupa, $N_0$ el número inicial de núcleos radiactivos (número total de ensayos); $N$ el número de núcleos supervivientes al cabo de un cierto tiempo (número de éxitos en el ensayo); $P_N$ la probabilidad de supervivencia de $N$ núcleos habiendo partido de $N_0$ (probabilidad de $N$ éxitos); $p$ la probabilidad de supervivencia de un núcleo aislado (probabilidad de éxito en un ensayo asilado); y $q$ la probabilidad de desintegración de un núcleo aislado (probabilidad de fracaso en un ensayo aislado).

De la ley de desintegración radiactiva (3) podemos calcular el número relativo de núcleos que quedan (sobreviven) al cabo un cierto tiempo $t$:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \tag{8}$$

Por lo tanto, como la expresión anterior se puede interpretar como *casos favorables* entre *casos posibles*, la probabilidad de supervivencia de un núcleo aislado ($p$) es precisamente (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2012):

$$p = e^{-\lambda t} \tag{9}$$

Y la probabilidad de desintegración ($q$) será, por lo tanto:

$$q = 1 - p = 1 - e^{-\lambda t} \tag{10}$$

Conociendo la probabilidad de las dos casuísticas, éxito (supervivencia de un núcleo) y fracaso (desintegración de un núcleo), y considerando que la desintegración de cada núcleo es un proceso independiente y no se influyen entre ellos, podemos calcular la probabilidad de supervivencia de $N$ núcleos ($P_N$) de una muestra radiactiva haciendo uso de la distribución binomial (7). De esta forma, la variable aleatoria $N$, que modela el número de núcleos supervivientes al cabo de un cierto tiempo, quedaría perfectamente definida y caracterizada, con un valor y su probabilidad dentro del espacio muestral de la misma (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2012).

De la distribución binomial podemos, además, determinar otros parámetros estadísticos de interés, como son la media ($\mu$)*,* la variancia ($\sigma^2$) y la desviación típica o estándar ($\sigma$) (Huang, 1987):

$$\mu = N_0 p = N_0 e^{-\lambda t} = N \tag{11}$$

$$\sigma^2 = N_0 p(1-p) = N_0 pq \tag{12}$$

$$\sigma = \sqrt{N_0 pq} \tag{13}$$

En el caso que nos ocupa, la desintegración radiactiva, la media ($\mu$) representa el valor promedio de núcleos supervivientes, es decir, el valor más esperado (probable), y como se puede ver, se corresponde con el valor de núcleos que proporciona la ley de desintegración radiactiva ($N$); la variancia ($\sigma^2$) y la desviación típica o estándar ($\sigma$) representan la dispersión de núcleos supervivientes con respecto a la media. Estos parámetros estadísticos proporcionan una idea ajustada del proceso probabilístico de desintegración radiactiva, ya que con la media podemos determinar el promedio de núcleos supervivientes más probable; y con la desviación estándar la dispersión que se produce respecto a esa media, es decir, la variabilidad real del número de núcleos supervivientes.

Por lo tanto, con la distribución binomial podemos modelar correctamente el proceso de desintegración radiactiva teniendo en cuenta su naturaleza estadística.

No obstante, el cálculo probabilístico de la distribución binomial tiene un problema matemático asociado, que es el cálculo de factoriales de números muy elevados, los cuales no son resolubles con la tecnología actual (memorias de dispositivos electrónicos insuficientes). Este problema nos influye en gran medida, ya que el número de núcleos será habitualmente grande, del orden del número de Avogadro ($\sim 10^{23}$). En estos casos podríamos contemplar la posibilidad de utilizar aproximaciones numéricas como la de Stirling o similares propuestas en la bibliografía (Ross, 2012) y (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2012). No obstante, para simplificar y clarificar las matemáticas de este proceso físico, debemos buscar una solución que nos permita calcular la probabilidad de manera más sencilla y abordable matemáticamente, sin métodos numéricos que requieran cálculos computacionales. Aun así, cabe remarcar que, para un número de muestras menor a 100, los factoriales son plenamente calculables con la tecnología actual (ordenadores y calculadoras convencionales) y la distribución binomial se ajustaría perfectamente a un modelado preciso del proceso de desintegración radiactiva como se ha indicado anteriormente.

Para intentar solucionar el problema comentado anteriormente, es interesante notar que la probabilidad del caso más esperado (la media $\mu$) en una distribución binomial disminuye a medida que aumentamos el número de ensayos (núcleos iniciales ($N_0$)) como se puede ver en las figuras 1 y 2:

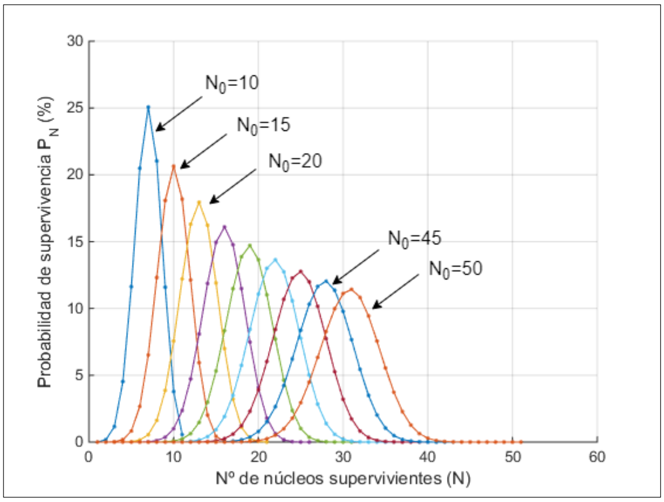



**FIGURA 1.** Probabilidad de supervivencia de $N$ núcleos de $T_{1/2} = 5370$ años al cabo de $t = 7000$ años para varias muestras con diferentes núcleos iniciales $N_0$. El valor de las abscisas del punto máximo de cada curva (cada $N_0$) es el valor medio/esperado ($\mu$) de núcleos supervivientes, y las ordenadas en esos puntos indican la probabilidad de que eso suceda. Por ejemplo, para $N_0 = 10$ núcleos iniciales, al cabo de 7000 años, la probabilidad de que queden 7 núcleos ($\mu$) es del 25%, y de que queden 5 es de ~12%.

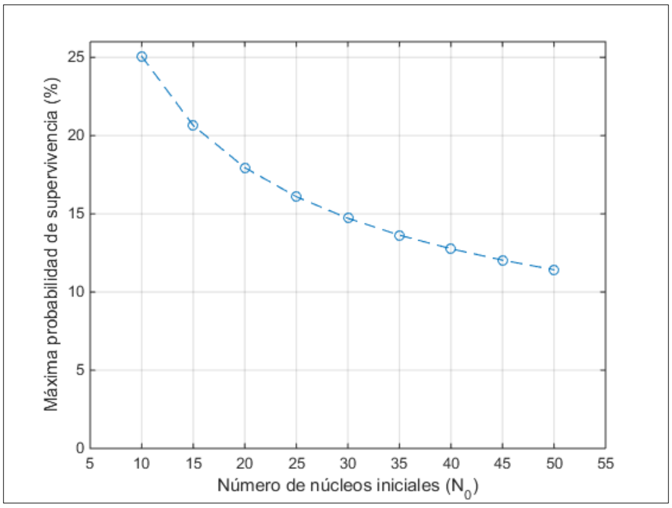



**FIGURA 2.** Para los mismos datos que en la figura 1, se muestra la probabilidad de supervivencia del caso más esperado (la media $\mu$) en función del número inicial de muestras ($N_0$) mediante 'o', sin necesidad de conocer el valor de la media. Se observa una tendencia potencial decreciente de la que se puede interpolar una función asintótica que se muestra en la gráfica mediante '--'del tipo $P_N(N_0) \cong aN_0^{-\alpha}$.

De la figura 2, con el fin de poder calcular la probabilidad del caso más probable de núcleos supervivientes sin tener que hacer uso de la distribución binomial, que lleva implícito el cálculo de factoriales de números muy elevados, se pueden interpolar los datos conocidos de probabilidad para $N_0$ bajas (calculados mediante la distribución binomial) a través de una función asintótica de tipo potencial decreciente como:

$$P_N(N_0) \cong aN_0^{-\alpha} \tag{14}$$

donde $a$ y $\alpha$ son constantes a determinar mediante una interpolación valores conocidos de $P_N$ y $N_0$ a partir de la distribución binomial; y $P_N(N_0)$ es una función que proporciona la probabilidad de supervivencia de $N$ núcleos (valor promedio más probable dado por la ley de desintegración radiactiva) en función de $N_0$ sin necesidad de recurrir al cálculo de factoriales de la expresión (7) de la distribución binomial.

Esta función (14) ajusta los valores de probabilidad con un coeficiente de regresión $R^2$>90%, por lo que podemos utilizarla como una buena aproximación para conocer, al menos, el orden de magnitud de la probabilidad de supervivencia de $N$ núcleos cuando $N_0$ es muy elevado, evitando así el cálculo de factoriales. No obstante, no hay que olvidar que esta función no deja de ser una interpolación que no ajusta a la perfección, pero soluciona el problema de los factoriales de una forma razonablemente precisa.

Esta característica de la distribución binomial es muy importante porque nos permite observar que la probabilidad de supervivencia de $N$ núcleos radiactivos al cabo de un cierto tiempo (valor que nos proporciona la ley de desintegración radiactiva (3) y se corresponde con el valor medio ($\mu$) de la distribución binomial) disminuye a medida que $N_0$ aumenta, lo cual es del todo razonable, pues al existir más núcleos iniciales (ensayos en la distribución binomial), aumenta el espacio muestral, y la probabilidad total se encuentra más repartida entre todas las casuísticas posibles.

Por lo tanto, es lógico pensar que, en casos prácticos con muestras radiactivas donde se trabaja con órdenes de magnitud de núcleos de $N_0 \sim 10^{23}$, la máxima probabilidad de supervivencia de $N$ núcleos que proporciona la ley de desintegración radiactiva (3) disminuye hasta tomar valores muy pequeños o prácticamente despreciables, lo cual puede confundir a los estudiantes, ya que pueden malinterpretar que la ley de desintegración radiactiva empeora su modelado físico a medida que el número de núcleos aumenta, cosa totalmente falsa.

Lo que sucede al trabajar con un número de núcleos muy elevado es que la probabilidad individual de cada casuística del espacio muestral es muy pequeña, por lo que no proporciona información útil del modelado real del proceso. En estos casos nos interesa conocer el rango de valores más probables, es decir, no el valor individual (número de núcleos supervivientes) más probable, sino el conjunto de valores (rango de posibles núcleos supervivientes) que proporcione una mayor probabilidad acumulada. De esta manera el proceso queda mejor descrito.

En consecuencia, para modelar el proceso de desintegración radiactiva cuando el número de núcleos es muy elevado necesitamos, además de la aproximación asintótica de la binomial, alguna distribución de probabilidad que sea capaz de determinar un rango de máxima probabilidad y aclare mejor el comportamiento estadístico de este fenómeno físico.

**D. Distribución de Poisson**

Considerando una primera aproximación, donde se pretenda modelar el proceso de desintegración radiactiva de una gran cantidad de núcleos (ensayos) caracterizados por una baja probabilidad de que suceda cada uno de ellos, si se puede considerar que $p \to 0$ y que $N_0 \to \infty$, de tal forma que la media $\mu = N_0 p$ sea constante, se puede probar que la distribución binomial se reduce a una distribución de Poisson (Ross, 2012), que caracteriza la probabilidad de una variable aleatoria como:

$$P(X = N) \cong \frac{\mu^N e^{-\mu}}{N!} \tag{15}$$

Esta distribución es ampliamente utilizada en la bibliografía para modelar experimentalmente el proceso de desintegración radiactiva midiendo la frecuencia de aparición del número de conteos de un contador Geiger para un intervalo de tiempo dado (Campbell & Duarte, 2008), cuyos detalles no entran en los propósitos de este artículo.

Esta distribución puede resultar útil en algunos estudios experimentales de conteos Geiger, pero para el caso teórico que nos ocupa, donde nos interesa calcular la probabilidad de supervivencia del número de núcleos (o rango) más probable, sigue teniendo el problema de tener que calcular el factorial de un número de núcleos superviviente ($N$) que podría seguir siendo muy elevado, aunque menor que $N_0$ (número de núcleos iniciales) que aparecía en la distribución binomial, por lo que la mejora con respecto a la distribución binomial es escasa para el fin que buscamos.

**E. Distribución Normal o Gaussiana**

Por otra parte, es bien sabido que, cuando se tiene una distribución binomial con un gran número de ensayos se puede aproximar, por el teorema de Moivre-Laplace, a una distribución normal o de Gauss (Morrison, 2003). Este es el caso de un proceso de desintegración radiactiva, ya que habitualmente existen un número muy elevado de núcleos desintegrables (ensayos) (Ehmann & Vance, 1991).

La distribución normal (o de Gauss) viene caracterizada por la famosa función normalizada $f(x)$ denominada comúnmente *campana de Gauss*, cuya forma se puede apreciar en la figura 1 de este artículo cuando se representa la probabilidad de la distribución binomial para un número de núcleos inicial elevado ($N_0 \uparrow\uparrow$).

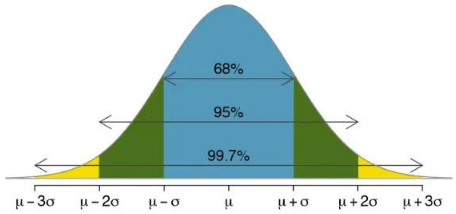
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{16}$$

En esta función, como en la binomial, la $\sigma^2$ se corresponde con la varianza; $\mu$ es la media, que representa el máximo de la campana de Gauss; y $\sigma$ es la desviación típica, que determina la forma de la campana (valores pequeños de $\sigma$ hacen la campana más estrecha, mientras que valores grandes de $\sigma$ hacen campana más ancha) (Morrison, 2003). Los valores numéricos de estos parámetros estadísticos se corresponden con los mismos que en la distribución binomial dados por las ecuaciones (11), (12) y (13).

La función $f(x)$ es un ejemplo de función de densidad de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua, que sustituye a la función de probabilidad del caso discreto de la binomial, que proporcionaba la probabilidad de cada posible valor de la variable aleatoria (Ross, 2012). Para una variable aleatoria continua, la función de densidad de probabilidad establece que la probabilidad de que la variable se encuentre en un intervalo cerrado *[a,b]* es el área debajo de la curva en ese intervalo (Ross, 2012), es decir:

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)dx \tag{17}$$

Para una distribución normal o gaussiana los valores de probabilidad entorno a la media están muy estudiados y tabulados en la bibliografía (Ross, 2012), de manera que se verifican las siguientes relaciones sin necesidad de recurrir al cálculo de una integral definida:




$$\begin{cases} P[\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma] = 0{,}683 \\ P[\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma] = 0{,}954 \\ P[\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma] = 0{,}997 \end{cases} \tag{18}$$

Estas relaciones indican que, en una distribución normal (o gaussiana), hay una fuerte agrupación de datos entorno a la media, y que el intervalo de valores significativos se reduce, prácticamente, al intervalo $[\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma]$.

Aplicando este resultado a nuestro caso concreto de desintegración radiactiva, mediante la distribución normal podemos determinar que la supervivencia un rango de núcleos comprendido entre $[\mu - 3\sigma \leq N \leq \mu + 3\sigma]$ estará en torno al 99,7%.

Es importante remarcar en este punto que, mediante la distribución normal, al ser una función de probabilidad de variable continua, podemos determinar el rango de núcleos supervivientes con una probabilidad del 99,7%. Sin embargo, no podemos calcular la probabilidad de que un número específico de núcleos se desintegre, como sí es posible con la distribución binomial, ya que se trata de una distribución de variable discreta. Para este propósito, recuerde que, si contamos con un número muy elevado de núcleos, se puede realizar una extrapolación asintótica del tipo potencial decreciente como se ha mencionado anteriormente (14). Aunque el valor obtenido no será de utilidad práctica, ya que será extremadamente pequeño y no brindará información precisa sobre el proceso de desintegración radiactiva real, pues simplemente proporcionará una idea del número de núcleos que sobrevivirán. Cuando $N_0$ es muy grande, es más informativo considerar el margen o rango de valores más probable en lugar de enfocarse en el valor más probable de forma aislada, el cual, como hemos comentado, tendrá una probabilidad individual insignificante.

**F. Interpretación final de la ley de desintegración radiactiva**

Todo lo visto en este apartado se resume en el diagrama de flujo mostrado a continuación, el cual puede servir a estudiantes y docentes para aplicarlo al estudio del proceso estadístico de la desintegración radiactiva.

En este diagrama se puede ver, en primer lugar, que la ley de desintegración radiactiva proporciona el valor más probable del número de núcleos superviviente o que quedan sin desintegrar ($N$) al cabo de un cierto tiempo mediante la expresión (3). De esta ley se puede obtener la probabilidad de supervivencia de cada núcleo por separado ($p$), y la probabilidad de desintegración ($q$), a través de las expresiones (9) y (10).

Para determinar la probabilidad de la variable aleatoria que caracteriza el número de núcleos supervivientes ($N$) partiendo de $N_0$ núcleos, podemos hacer uso de la distribución binomial (suponiendo que los procesos de desintegración de cada núcleo son independientes entre ellos), cuya media ($\mu$) y desviación típica ($\sigma$) vienen determinadas por esta distribución mediante las expresiones (11) y (13).

Si el número inicial de núcleos ($N_0$) es menor que 100, se puede utilizar sin problema la expresión convencional de la distribución binomial (7) para calcular la probabilidad requerida ($P_N$).

Si $N_0 > 100$, podemos tener problemas en el cálculo de factoriales de números elevados, por lo que deberemos realizar, en este caso, una interpolación asintótica de la distribución binomial dada por la ecuación (14) para determinar de forma estimada el orden de magnitud de la probabilidad individual de la variable aleatoria ($P_N$). Además, para un número muy elevado de núcleos, la distribución binomial se puede aproximar por una distribución normal, mediante la cual se puede estimar que la probabilidad de que la variable aleatoria (número de núcleos supervivientes $N$) esté el rango de valores comprendidos entre la media y tres veces su desviación típica ($\mu \pm 3\sigma$) sea del 99,7%.

Con todo, es posible y necesario determinar, a través de la ley de desintegración radiactiva y las distribuciones de probabilidad presentadas, la cantidad más probable de núcleos supervivientes ($N$ y $\sigma$) y su probabilidad $P_N$ (o su rango más probable $P_{N\pm3\sigma}$), ya que estamos tratando con eventos naturales de carácter probabilístico y estadístico que llevan asociados el uso de variables aleatorias, las cuales se deben expresar con precisión tanto en valor como en probabilidad.

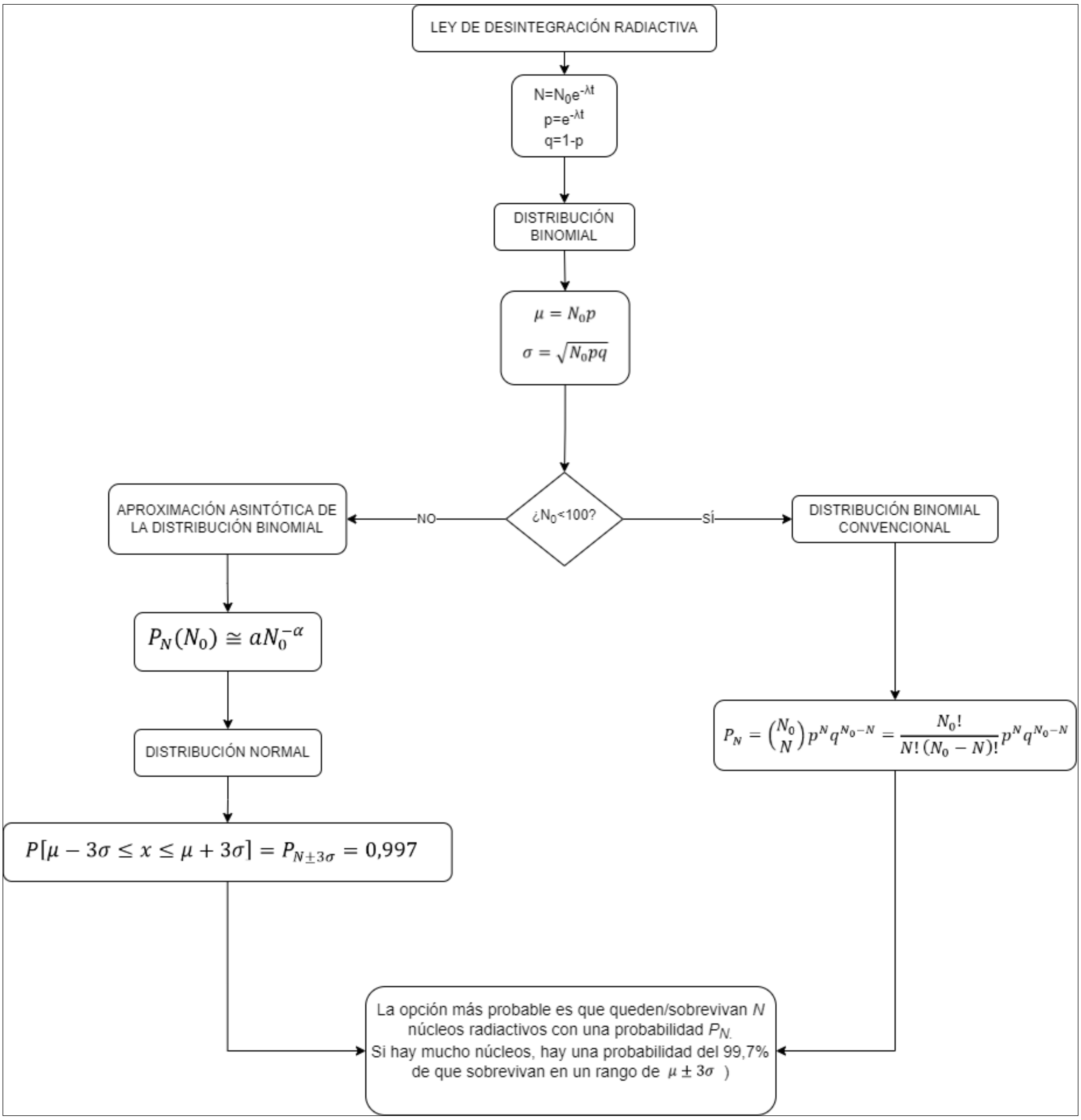



**FIGURA 3.** Diagrama de flujo del proceso estadístico de la ley de desintegración radiactiva.

## III. EJEMPLO PRÁCTICO

En este apartado se presenta un ejemplo práctico de aplicación didáctica para desarrollar en el aula, similar a los que se pueden encontrar en la bibliografía y libros de texto de esta temática. Con este ejemplo se puede introducir y explicar adecuadamente el carácter probabilístico y estadístico de la ley de desintegración radiactiva de una forma secuenciada, integrada y comprensible para el alumnado.

> *Supongamos una muestra radiactiva formada por un tipo de isótopo radiactivo con un periodo de semidesintegración de 10 días.*

Con la expresión (6) podemos calcular la constante de desintegración radiactiva (λ):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{10} = 0{,}0693\ días^{-1} \tag{19}$$

*a) Si inicialmente la muestra contenía 100 núcleos, calcule la cantidad de núcleos que quedan al cabo de 8 días.*

Este enunciado es un ejemplo común y típico que se puede encontrar en cualquier colección de problemas sobre la ley de desintegración radiactiva. Se resolvería aplicando dicha ley (3):

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = 100e^{-0{,}0693\cdot 8} = 57{,}44 \cong 57\ núcleos \tag{20}$$

Y habitualmente nos quedaríamos aquí y diríamos: "Al cabo de 8 días quedarán 57 núcleos sin desintegrar". Sin embargo, como hemos explicado anteriormente, el número de núcleos superviviente $N$ es una variable aleatoria, por lo que cabría especificar también la probabilidad de que queden 57 núcleos. Además, se debe remarcar al alumando y hacer hincapié en que esta no es la única solución posible, pues estamos ante un problema probabilístico, donde existen múltiples soluciones (que sobrevivan 0,1,2,3,….,98,99,100 núcleos), cada una de ellas con su probabilidad correspondiente, y no se puede calcular el número de núcleos supervivientes exactos de manera determinista. En este caso, por ejemplo, el resultado ha dado 57,44, por lo que la probabilidad de que queden 57 o 58 es seguramente muy similar, aunque un poco mayor la de 57.

Por lo tanto, resolver este ejercicio expresando únicamente el número de núcleos que sobreviven es incompleto, pues debemos proporcionar los datos probabilísticos que definan correctamente a la variable aleatoria $N$. Este proceso se obvia en la gran mayoría de libros de texto, y es un error conceptual que el alumnado arrastra a lo largo de su formación y que debería tratarse con el rigor que corresponde, ya que, de lo contrario, la percepción del estudiante es que esta ley proporciona resultados deterministas, no probabilísticos. Esta reflexión es lo que se debe extraer de este primer apartado.

*b) Si inicialmente la muestra tenía 3 núcleos, explica <u>detalladamente</u> qué podría suceder con estos 3 núcleos al cabo de 1 día; 6 días; 10 días; 14 días y 40 días.*

Como tenemos un número de núcleos pequeño y abordable, podemos utilizar la distribución binomial para resolver este problema. En primer lugar, debemos contemplar todas las posibilidades que le pueden suceder a la muestra, que inicialmente cuenta con 3 núcleos ($N_0 = 3$), es decir, el espacio muestral de la variable aleatoria $N$, que es este caso es:

- Que no sobreviva ningún núcleo ($N_0$=3, $N$=0)
- Que sobreviva 1 núcleo ($N_0$=3, $N$ =1)
- Que sobrevivan 2 núcleos ($N_0$=3, $N$ =2)
- Que sobrevivan 3 núcleos ($N_0$=3, $N$ =3)

Por lo tanto, el espacio muestral de la variable aleatoria $N$ es {0,1,2 y 3}, que se corresponde con todos los posibles valores que puede tomar. Debemos calcular para cada caso (para cada instante de tiempo $t$ que indica el enunciado), la probabilidad de que suceda cada uno de estos valores.

<u>$t = 1$ día</u> ($t \ll T_{1/2}$)

Calculamos la probabilidad de supervivencia de un núcleo aislado (que será la misma para todos los núcleos, ya que son procesos independientes) mediante la expresión (9):

$$p = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}0693\cdot 1} = 0{,}933 \tag{21}$$

La probabilidad de desintegración de un núcleo aislado será, por lo tanto (10):

$$q = 1 - p = 0{,}067 \tag{22}$$

Calculamos ahora las probabilidades de cada caso que podía sucederle a la muestra mediante la expresión (7):

- Probabilidad de que no sobreviva ningún núcleo ($N$ =0)

$$P_0 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{0!(3-0)!} 0{,}933^0 0{,}067^{3-0} = 0{,}0003 \tag{23}$$

- Probabilidad de que sobreviva 1 núcleo ($N$ =1)

$$P_1 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{1!(3-1)!} 0{,}933^1 0{,}067^{3-1} = 0{,}0125 \tag{24}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 2 núcleos ($N$ =2)

$$P_2 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0{,}933^2 0{,}067^{3-2} = 0{,}1749 \tag{25}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 3 núcleo ($N = 3$)

$$P_3 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{3!(3-3)!} 0{,}933^3 0{,}067^{3-3} = 0{,}8122 \tag{26}$$

Por lo tanto, al cabo de 1 día pueden haber pasado 4 situaciones:

1. Que no sobreviva ningún núcleo, es decir, que se hayan desintegrado los 3 núcleos iniciales. Este caso es el menos probable, con una probabilidad del 0,03%.
2. Que quede/sobreviva 1 solo núcleo, es decir, que se hayan desintegrado 2 núcleos. Este caso puede suceder con una probabilidad del 1,25%.
3. Que queden/sobrevivan 2 núcleos, es decir, que se haya desintegrado 1 núcleo únicamente. Este caso puede suceder con una probabilidad del 17,49%.
4. Que queden los 3 núcleos, es decir, que no se haya desintegrado ningún núcleo. Este es el caso más probable, con una probabilidad del 81,22%

La suma de todas las probabilidades debe dar el 100%.

Los resultados son plenamente lógicos, pues al ser $t$ <<$T_{1/2}$, es de esperar que lo más probable es que queden prácticamente todos los núcleos sin desintegrar y el menos probable que se desintegren todos.

$t = 6$ días ($t < T_{1/2}$)

Calculamos la probabilidad de supervivencia de un núcleo aislado:

$$p = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}0693 \cdot 6} = 0{,}6598 \tag{27}$$

La probabilidad de desintegración será, por lo tanto:

$$q = 1 - p = 0{,}3402 \tag{28}$$

Calculamos ahora las probabilidades de cada caso que podría sucederle a la muestra:

- Probabilidad de que no sobreviva ningún núcleo ($N$ =0)

$$P_0 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{0!(3-0)!} 0{,}3402^0 0{,}6598^{3-0} = 0{,}0394 \tag{29}$$

- Probabilidad de que sobreviva 1 núcleo ($N$ =1)

$$P_1 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{1!(3-1)!} 0{,}3402^1 0{,}6598^{3-1} = 0{,}2291 \tag{30}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 2 núcleos ($N$ =2)

$$P_2 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0{,}3402^2 0{,}6598^{3-2} = 0{,}4443 \tag{31}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 3 núcleo ($N = 3$)

$$P_3 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{3!(3-3)!} 0{,}3402^3 0{,}6598^{3-3} = 0{,}2872 \tag{32}$$

Por lo tanto, al cabo de 6 días pueden haber pasado 4 situaciones:

1. Que no sobreviva ningún núcleo, es decir, que se hayan desintegrado los 3 núcleos iniciales. Este caso es el menos probable, y puede suceder con una probabilidad del 3,94%.

2. Que quede/sobreviva 1 solo núcleo, es decir, que se hayan desintegrado 2 núcleos. Este caso puede suceder con una probabilidad del 22,91%.

3. Que queden/sobrevivan 2 núcleos, es decir, que se haya desintegrado 1 núcleo únicamente. Este es el más probable, y puede suceder con una probabilidad del 44,43%.

4. Que queden los 3 núcleos, es decir, que no se haya desintegrado ningún núcleo. Este caso puede suceder con una probabilidad del 28,72%

La suma de todas las probabilidades debe dar el 100%.

Los resultados son plenamente lógicos, pues al ser $t < T_{1/2}$, es de esperar que lo más probable es que queden sin desintegrar más de la mitad de los núcleos. Los casos extremos vemos que también concuerdan, pues es de esperar que si $t < T_{1/2}$ sea más probable que queden todos los núcleos sin desintegrar que se desintegren todos.

$t = 10$ días ($t = T_{1/2}$)

Como en los casos anteriores, calculamos la probabilidad de supervivencia y desintegración de un núcleo aislado:

$$p = e^{-\lambda t} = e^{-0,0693\cdot 10} = 0,5 \tag{33}$$

$$q = 1 - p = 0,5 \tag{34}$$

Calculamos ahora las probabilidades de cada caso que podría sucederle a la muestra:

- Probabilidad de que no sobreviva ningún núcleo ($N$ =0)

$$P_0 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{0!(3-0)!} 0,5^0 0,5^{3-0} = 0,125 \tag{35}$$

- Probabilidad de que sobreviva 1 núcleo ($N$ =1)

$$P_1 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{1!(3-1)!} 0,5^1 0,5^{3-1} = 0,375 \tag{36}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 2 núcleos ($N$ =2)

$$P_2 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0,5^2 0,5^{3-2} = 0,375 \tag{37}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 3 núcleo ($N = 3$)

$$P_3 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{3!(3-3)!} 0,5^3 0,5^{3-3} = 0,125 \tag{38}$$

Por lo tanto, al cabo de 10 días pueden haber pasado 4 situaciones:

1. Que no sobreviva ningún núcleo, es decir, que se hayan desintegrado los 3 núcleos iniciales. Este caso puede suceder con una probabilidad del 12,5%

2. Que quede/sobreviva 1 solo núcleo, es decir, que se hayan desintegrado 2 núcleos. Este caso puede suceder con una probabilidad del 37,5%.

3. Que queden/sobrevivan 2 núcleos, es decir, que se haya desintegrado 1 núcleo únicamente. Este caso puede suceder con una probabilidad del 37,5%.

4. Que queden los 3 núcleos, es decir, que no se haya desintegrado ningún núcleo. Este caso puede suceder con una probabilidad del 12,5%

La suma de todas las probabilidades debe dar el 100%.

Los resultados son también los esperados, pues al ser $t = T_{1/2}$, es de esperar que queden la mitad de los núcleos iniciales. Como inicialmente teníamos 3, la mitad son 1 o 2 (no podemos tener 1,5 núcleos), con la misma probabilidad del 37,5%. Los casos extremos, que no se desintegre ninguno o que se desintegren los 3, son los menos probables, pero pueden suceder cada uno con una ocurrencia del 12,5%, que para nada es despreciable.

$t = 14$ días ($t > T_{1/2}$)

Como en los casos anteriores, calculamos la probabilidad de supervivencia y desintegración de un núcleo aislado:

$$p = e^{-\lambda t} = e^{-0,0693\cdot 14} = 0,3789 \tag{39}$$

$$q = 1 - p = 0{,}6211 \tag{40}$$

Calculamos ahora las probabilidades de cada caso que podría sucederle a la muestra:

- Probabilidad de que no sobreviva ningún núcleo ($N$ =0)

$$P_0 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{0!(3-0)!} 0{,}3789^0 0{,}6211^{3-0} = 0{,}2396 \tag{41}$$

- Probabilidad de que sobreviva 1 núcleo ($N$ =1)

$$P_1 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{1!(3-1)!} 0{,}3789^1 0{,}6211^{3-1} = 0{,}4385 \tag{42}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 2 núcleos ($N$ =2)

$$P_2 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0{,}3789^2 0{,}6211^{3-2} = 0{,}2675 \tag{43}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 3 núcleo ($N = 3$)

$$P_3 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{3!(3-3)!} 0{,}3789^3 0{,}6211^{3-3} = 0{,}0544 \tag{44}$$

Por lo tanto, al cabo de 14 días pueden haber pasado 4 situaciones:

1. Que no sobreviva ningún núcleo, es decir, que se hayan desintegrado los 3 núcleos iniciales. Este caso puede suceder con una probabilidad del 23,96%
2. Que quede/sobreviva 1 solo núcleo, es decir, que se hayan desintegrado 2 núcleos. Este caso es el más probable, y puede suceder con una probabilidad del 43,85%.
3. Que queden/sobrevivan 2 núcleos, es decir, que se haya desintegrado 1 núcleo únicamente. Este caso puede suceder con una probabilidad del 26,75%.
4. Que queden los 3 núcleos, es decir, que no se haya desintegrado ningún núcleo. Este caso puede suceder con una probabilidad del 5,44%

La suma de todas las probabilidades debe dar el 100%.

Los resultados son también los esperados, pues al ser $t > T_{1/2}$, es de esperar que el caso más probable sea que se hayan desintegrado más de la mitad de los núcleos y quede solamente 1 núcleo. La probabilidad de que queden/sobrevivan 2 núcleos es mayor que la probabilidad de que no quede ninguno, este puede ser debido a que el tiempo no es suficientemente grande, es decir, estamos todavía muy cerca del tiempo de semidesintegración, por eso es más probable que queden 2 que no quede ninguno. El caso menos probable es el que establece que sobreviven todos los núcleos, pues es evidente que si hemos sobrepasado el $T_{1/2}$, es muy poco probable que sigan todos los núcleos sin desintegrarse, no obstante, no es imposible, hay un 5,44% de probabilidad de que esto ocurra.

$\underline{t = 40 \text{ días}}$ ($t \gg T_{1/2}$)

Como en los casos anteriores, calculamos la probabilidad de supervivencia y desintegración de un núcleo aislado:

$$p = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}0693 \cdot 40} = 0{,}0625 \tag{45}$$

$$q = 1 - p = 0{,}9375 \tag{46}$$

Calculamos ahora las probabilidades de cada caso que podría sucederle a la muestra:

- Probabilidad de que no sobreviva ningún núcleo ($N$ =0)

$$P_0 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{0!(3-0)!} 0{,}0625^0 0{,}0625^{3-0} = 0{,}8239 \tag{47}$$

- Probabilidad de que sobreviva 1 núcleo ($N$ =1)

$$P_1 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0-N} = \frac{3!}{1!(3-1)!} 0{,}0625^1 0{,}0625^{3-1} = 0{,}1648 \tag{48}$$

- Probabilidad de que sobrevivan 2 núcleos ($N$ =2)

$$P_2 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0 - N} = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0{,}0625^2 0{,}0625^{3-2} = 0{,}011 \quad (49)$$

- Probabilidad de que sobrevivan 3 núcleo ($N = 3$)

$$P_3 = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0 - N} = \frac{3!}{3!(3-3)!} 0{,}0625^3 0{,}0625^{3-3} = 0{,}00024 \quad (50)$$

Por lo tanto, al cabo de 40 días pueden haber pasado 4 situaciones:

1. Que no sobreviva ningún núcleo, es decir, que se hayan desintegrado los 3 núcleos iniciales. Este caso es el más probable, y puede suceder con una probabilidad del 82,39%.
2. Que quede/sobreviva 1 solo núcleo, es decir, que se hayan desintegrado 2 núcleos. Este caso puede suceder con una probabilidad del 16,48%.
3. Que queden/sobrevivan 2 núcleos, es decir, que se haya desintegrado 1 núcleo únicamente. Este caso puede suceder con una probabilidad del 1,1%.
4. Que queden los 3 núcleos, es decir, que no se haya desintegrado ningún núcleo. Este es el caso menos probable, con una probabilidad del 0,024%

La suma de todas las probabilidades debe dar el 100%.

Los resultados son plenamente lógicos, pues al ser $t \gg T_{1/2}$, es de esperar que lo más probable es que no queden núcleos por desintegrar, es decir, que se hayan desintegrado todos, o casi todos. Pero siempre es interesante remarcar que no es la única posibilidad, pues en este caso, por ejemplo, hay un 16,48% de probabilidad de que quede todavía un núcleo por desintegrar, lo cual no es para nada despreciable.

En este apartado (b) es importante hacer ver al alumnado que el proceso de desintegración radiactiva viene caracterizado por la variable aleatoria $N$ (número de núcleos supervivientes), la cual puede tomar varios valores, cada uno con su probabilidad asociada que se puede calcular con la distribución binomial (7), y es fundamental que así se contemple y se exprese dicha variable para evitar errores de concepto.

*c) Repita el apartado (b) aplicando directamente la ley de desintegración radiactiva, sin tener en cuenta parámetros probabilísticos. ¿Se puede extraer alguna conclusión comparando los resultados obtenidos en (b) y (c)?*

Aplicamos en todos los casos la ley de desintegración radiactiva general dada por la expresión (3):

- $t$ días: $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- $t = 1$día: $N = 3 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 1} = 2{,}79 \cong 3$ núcleos
- $t = 6$ días: $N = 3 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 6} = 1{,}98 \cong 2$ núcleos
- $t = 10$ días: $N = 3 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 10} = 1{,}5$ núcleos $\cong 1$ o $2$ núcleos
- $t = 14$ días: $N = 3 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 14} = 1{,}13 \cong 1$ núcleo
- $t = 40$ días: $N = 3 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 40} = 0{,}18 \cong 0$ núcleos

Si comparamos estos resultados con los obtenidos en el apartado (b) podemos observar que los obtenidos en este apartado (c) con la ley de desintegración radiactiva, aplicando redondeo matemático, proporciona el número de núcleos supervivientes más probable (calculados en (b) mediante la distribución binomial). En el caso de que existan dos posibilidades con la misma probabilidad, la ley de desintegración lo indica con el valor medio de las dos posibilidades, es decir, con el decimal *N*,5.

En este apartado, es interesante hacer ver a los estudiantes que cuando aplicamos la ley de desintegración radiactiva estamos calculando el valor del caso más probable de núcleos supervivientes ($N$), y deberíamos expresar también su probabilidad para caracterizar bien esta variable aleatoria. Además, siempre hay que hacer alusión a que esta posibilidad no es la única, pues podrían suceder otras casuísticas menos probables que se pueden determinar a partir de la distribución binomial como hemos hecho en el apartado (b). Aunque habitualmente, el caso que más nos interese sea el más probable.

*d) Calcule el número de átomos supervivientes más probable que quedan al cabo de 2 días partiendo de 1 mol de átomos y determine su probabilidad.*

Si tenemos 1 mol de átomos, inicialmente tendremos $6{,}022 \cdot 10^{23}$ núcleos atómicos por desintegrar. Por lo tanto, aplicando la ley de desintegración radiactiva, al cabo de 2 días, el caso más probable es que queden:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = 6{,}022 \cdot 10^{23} e^{-0{,}0693 \cdot 2} = 5{,}24 \cdot 10^{23}\ núcleos \quad (51)$$

Para calcular la probabilidad de que sobrevivan esa cantidad de núcleos ($P_N$), deberíamos hacer uso de la distribución binomial (7), pero aparecen factoriales de números muy elevados ($6{,}022 \cdot 10^{23}!$ y $5{,}24 \cdot 10^{23}!$ concretamente) que no se pueden calcular con calculadoras u ordenadores convencionales.

Por lo tanto, si se quiere calcular de manera aproximada la probabilidad de que queden exactamente esa cantidad de núcleos, debemos hacer una interpolación asintótica como modela la expresión (14).

Para ello, calculamos inicialmente la probabilidad de supervivencia ($p$) y de desintegración ($q$) de 1 núcleo atómico:

$$p = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}0693 \cdot 2} = 0{,}8706 \quad (52)$$

$$q = 1 - p = 0{,}1294 \quad (53)$$

Tomamos ahora 2 casos de $N_0$ con los que podamos calcular la $P_N$ mediante la distribución binomial:

- Consideremos, por ejemplo, $N_0 = 50$, entonces:
  - El número de núcleos más probable es $N = 50e^{-0{,}0693 \cdot 2} = 44$ núcleos
  - Su probabilidad $P_{50} = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0 - N} = \frac{50!}{44!(50-44)!} 0{,}8706^{44} 0{,}1294^{50-44} = 16{,}77\ \%$.
- Consideremos, por ejemplo, $N_0 = 80$, entonces,
  - El número de núcleos más probable es $N = 80e^{-0{,}0693 \cdot 2} = 70$ núcleos
  - Su probabilidad $P_{70} = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0 - N} = \frac{80!}{70!(80-70)!} 0{,}8706^{70} 0{,}1294^{80-70} = 13{,}28\%$ .

Calculamos ahora las constantes $a$ y $\alpha$ de la interpolación asintótica (14):

$$\begin{cases} P_{44}(50) = 0{,}1677 \cong a50^{-\alpha} \\ P_{70}(80) = 0{,}1328 \cong a80^{-\alpha} \end{cases} \rightarrow a = 1{,}169;\ \alpha = 0{,}496 \quad (54)$$

Es decir, la función asintótica que modela aproximadamente (con $R^2$<90%) la probabilidad de suceso más probable de núcleos superviviente proporcionados por la ley de desintegración radiactiva es:

$$P_N(N_0) \cong 1{,}169 N_0^{-0{,}496} \quad (55)$$

Para obtener esta ecuación se ha desarrollado una interpolación simple de 2 puntos únicamente, pero se pueden tomar otros valores de $N_0$ y $P_N$ para realizar una interpolación por mínimos cuadrados de manera más precisa. No obstante, teniendo en cuenta el alumnado al que va dirigido este artículo, y considerando que esta interpolación proporciona únicamente una estimación del orden de magnitud de la probabilidad que buscamos, la cual tampoco dará una información definitiva del proceso de desintegración radiactiva, creemos que es suficiente realizar una interpolación simple y no complicar más el desarrollo matemático.

Por otra parte, se puede comprobar con el alumnado si esta función ajusta bien o no para que se familiaricen con funciones de interpolación, tan importantes en los campos científicos y de ingeniería. Para ello, podemos tomar un número de núcleos iniciales ($N_0$) con el que podamos calcular la probabilidad de supervivencia mediante la binomial y compararla con la probabilidad que proporciona la expresión de la aproximación asintótica (55).

Por ejemplo, para $N_0 = 100$, quedarían, según la ley de desintegración radiactiva (3) un total de:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = 100e^{-0{,}0693 \cdot 2} = 87 \text{ núcleos supervivientes} \quad (56)$$

Con la distribución binomial (7) podemos calcular la probabilidad de que esto ocurra:

$$P_{87}^{BIN} = \binom{N_0}{N} p^N q^{N_0 - N} = \frac{100!}{87!(100-87)!} 0{,}8706^{87} 0{,}1294^{100-87} = 0{,}1178 = 11{,}78\% \quad (57)$$

Con la aproximación asintótica (55) obtenemos un valor de:

$$P_{87}^{ASINT}(100) \cong 1{,}169 N_0^{-0{,}496} = 1{,}169 \cdot 100^{-0.496} = 0{,}1191 = 11{,}91\% \quad (58)$$

Vemos, por lo tanto, que la función asintótica ajusta bien, pues en ambos casos se obtiene un valor alrededor del 11% de probabilidad. Es importante recordar que esta interpolación funciona bien para $N_0$ grandes, de lo contrario es preferible aplicar directamente la expresión exacta de la distribución binomial (7).

Finalmente, retomando el problema original de este apartado (d), aplicamos la interpolación asintótica obtenida (55) para el caso que nos ocupa ($N_0 = 1$ mol $= 6{,}022 \cdot 10^{23}$ núcleos), ya que no podemos aplicar directamente la binomial por los números tan elevados que aparecen:

$$P_{5{,}24 \cdot 10^{23}}(6{,}022 \cdot 10^{23}) \cong 1{,}169 \cdot (6{,}022 \cdot 10^{23})^{-0.496} = 1{,}87 \cdot 10^{-12} = 1{,}87 \cdot 10^{-10}\% \qquad (59)$$

Este resultado significa que la probabilidad de que queden exactamente $5{,}24 \cdot 10^{23}$ núcleos al cabo de 2 días (valor que proporciona la ley de desintegración radiactiva) es del $1{,}87 \cdot 10^{-10}\%$. Como se puede ver, este valor de probabilidad es prácticamente despreciable y no aporta información útil. De hecho, podría incluso llegar a confundir al alumnado, ya que podría interpretar que no tiene mucho sentido que el valor que nos proporciona la ley de desintegración radiactiva es el más probable y tiene tan solo un $1{,}87 \cdot 10^{-10}\%$. Sin embargo, así es.

En resumen, en este apartado (d) es importante remarcar varios aspectos al alumnado. El primero es que, al trabajar con una cantidad muy grande de núcleos radiactivos, la distribución binomial no es factible utilizarla por problemas numéricos de cálculo matemático, y se debe hacer una interpolación asintótica como la desarrollada en este artículo del tipo potencial decreciente (14). En segundo lugar, se debe comprender que, al aumentar el número de núcleos, la probabilidad total de las casuísticas posibles se reparte, de manera que la probabilidad del caso más probable disminuye hasta valores muy pequeños o incluso despreciables. Por lo tanto, este valor de probabilidad no proporciona información realmente útil del proceso de desintegración radiactiva.

*e) Calcule la media, la varianza y la desviación típica del caso anterior (apartado (d)) e interprete los valores obtenidos.*

Como el proceso de desintegración radiactiva se puede modelar mediante una distribución binomial, podemos calcular datos estadísticos de utilidad como la media, la varianza y la desviación típica a partir de las expresiones (11), (12) y (13):

$$\mu = N_0 p = 6{,}022 \cdot 10^{23} e^{-0{,}069 \cdot 2} = 5{,}24 \cdot 10^{23} \qquad (60)$$

$$\sigma^2 = N_0 p(1-p) = 5{,}24 \cdot 10^{23}\,(1 - e^{-0{,}069 \cdot 2}) = 6{,}754 \cdot 10^{22} \qquad (61)$$

$$\sigma = 2{,}598 \cdot 10^{11} \qquad (62)$$

De los resultados obtenidos podemos interpretar, en primer lugar, que la media se corresponde con el valor que proporciona la ley de desintegración radiactiva (3), que es el valor más probable de que suceda en el proceso. Por otra parte, la varianza y la desviación típica indican la dispersión de los datos entorno a la media. En este caso, la desviación típica indica que los casos más probables de núcleos supervivientes se encuentran en torno a la media en un margen aproximado de $\sim 10^{11}$ núcleos. Como la media es del orden de $\sim 10^{23}$núcleos, podemos afirmar que el rango de valores más probables de núcleos supervivientes está en un margen relativamente estrecho en torno a la media.

En este apartado se debe trabajar la interpretación correcta de los parámetros estadísticos (media, varianza y desviación típica) de la distribución binomial para tener una buena concepción del proceso estocástico de la desintegración radiactiva. También es importante conducir al alumnado a la necesidad y el interés de conocer el rango más probable de núcleos supervivientes cuando tratamos con una gran cantidad de muestras, y no solo la probabilidad individual del caso más probable como se ha hecho en apartados anteriores.

*f) Encuentre el rango de núcleos supervivientes más probable del apartado (d)*

Para determinar el rango más probable de núcleos supervivientes cuando la cantidad de muestras es muy elevada debemos hacer uso de distribuciones de probabilidad diferentes a la binomial debido a los problemas que conlleva calcular el factorial de números muy elevados.

En una primera aproximación, como se ha discutido en el apartado teórico de este artículo, se podría pensar en utilizar una distribución de Poisson cuando $p$ es muy pequeña y $N_0$ muy elevado. Pero para el caso que nos ocupa, la probabilidad no es precisamente pequeña, $p = 0{,}87$, la cual no se puede considerar ni mucho menos mucho menor que 1. Además, siguen apareciendo factoriales de números muy elevados, pues $N! = 5{,}24 \cdot 10^{23}!$ no es resoluble computacionalmente (aunque es menor que $N_0! = 6{,}022 \cdot 10^{23}!$). Para el fin que buscamos, que se corresponde con encontrar la probabilidad de núcleos supervivientes de una muestra radiactiva al cabo de un cierto tiempo, no se recomienda el uso de la distribución de Poisson de manera generalizada, ya que necesita una presunción bastante limitante y rigurosa de que $p \ll 1$ y de que $N_0$ sea grande.

Descartada la distribución de Poisson, como se ha descrito en el desarrollo teórico, cuando el número de núcleos es muy elevado se puede aproximar la distribución binomial de variable discreta por una distribución normal o gaussiana de variable continua para modelar un mismo proceso, cuyos datos estadísticos de media, varianza y desviación típica vienen determinados por las expresiones (11), (12) y (13) de la distribución binomial. Para nuestro caso concreto tenemos que la función de densidad de probabilidad que modela el proceso aleatorio de supervivencia de núcleos radiactivos es, por lo tanto:

$$f(x) = \frac{1}{2{,}598\cdot 10^{11}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-5{,}24\cdot 10^{23})^2}{2\cdot 6{,}754\cdot 10^{22}}} \tag{63}$$

Tomando entonces el proceso de desintegración radiactiva como una distribución normal, es bien sabido que en este tipo de distribuciones se cumple que la probabilidad en un rango de $\pm 3\sigma$ alrededor de la media es del 99,7% (18), es decir:

$$P(5{,}24\cdot 10^{23} - 3\cdot 2{,}598\cdot 10^{11} < N < 5{,}24\cdot 10^{23} + 3\cdot 2{,}598\cdot 10^{11}) = 99{,}7\% \tag{64}$$

Nótese que, como el orden de magnitud de la media ($\mu = 5{,}24\cdot 10^{23}$) es mucho mayor que el de la desviación típica ($\sigma = 2{,}598\cdot 10^{11}$), la amplitud de la campana de Gauss es muy estrecha entorno a la media, como ya se había predicho en el apartado (e). Se puede afirmar entonces que, la probabilidad de que se sobrevivan $5{,}24\cdot 10^{23} \pm 3\cdot 2{,}598\cdot 10^{11}$ núcleos es del 99,7 %, y a nivel práctico, la ley de desintegración radiactiva nos proporciona el valor medio más probable en un rango muy estrecho comparado con la media. La figura 4 muestra gráficamente lo expuesto en este párrafo.

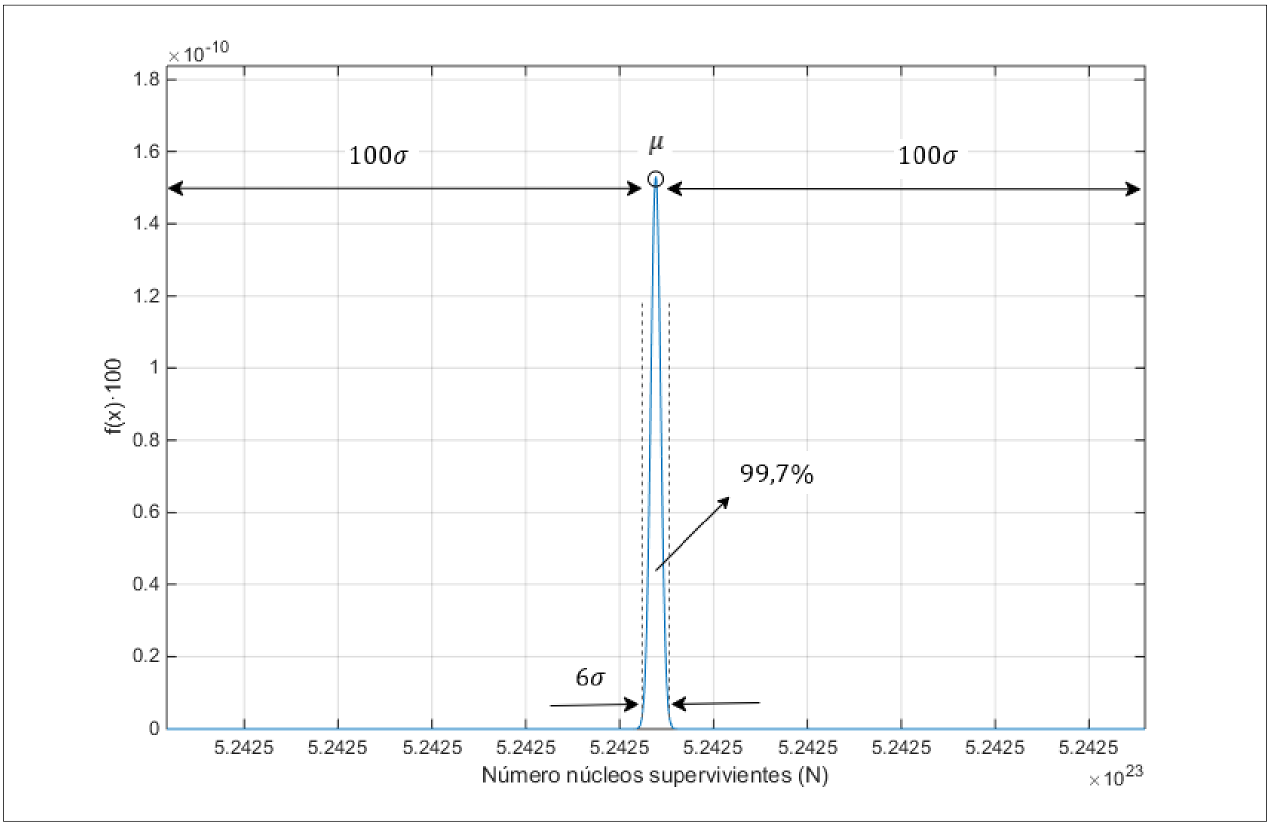



**FIGURA 4.** Función de densidad de probabilidad $f(x)$ (ecuación (63)) multiplicada por 100 del proceso de desintegración radiactiva que se plantea en el apartado (d) aproximado por una distribución normal o gaussiana. Se muestra en un margen de $\pm 100\sigma$ donde se puede apreciar que los valores más probables se encuentran agrupados fuertemente entorno a la media en un rango de $\pm 3\sigma$, y aunque su probabilidad individual sea del orden de $10^{-10}$%, la probabilidad acumulada de todos ellos es del 99,7%.

También es importante aclarar y remarcar en este apartado que, la probabilidad de que se sobreviva exactamente el valor que proporciona la ley de desintegración radiactiva ($N = 5{,}24\cdot 10^{23}$ núcleos) es extremadamente pequeña, del orden de $10^{-10}$%, como hemos visto en el apartado (d), donde hemos calculado esta probabilidad con una aproximación asintótica de la distribución binomial (59). Es necesario hacer hincapié y subrayar la diferencia entre los valores calculados en los apartados (d) y (f), aclarando que, la probabilidad acumulada de que sobrevivan el rango de valores de $5{,}24\cdot 10^{23} \pm 3\cdot 2{,}598\cdot 10^{11}$ núcleos es del 99,7 %, pero la que queden exactamente $5{,}24\cdot 10^{23}$ es solamente del

$10^{-10}$%. Aquí radica la importancia en la comprensión de la naturaleza estadística del proceso de desintegración radiactiva y su significado físico a la hora de realizar cálculos con dicha ley.

*g) De los datos del apartado (d), encuentre la probabilidad de que sobrevivan entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu - 0{,}5\sigma$ núcleos radiactivos*

Para finalizar el ejemplo práctico, se propone calcular la probabilidad en un rango diferente al de los valores tabulados de la distribución normal entorno a la media (18). Para ello, no queda más remedio que utilizar la función de densidad de probabilidad (63) y calcular el área que hay debajo de esta función en el rango que se establece en el enunciado. Para ello, es necesario resolver una integral definida que se puede calcular de manera numérica con herramientas computacionales como MATLAB o Wolfram Alpha.

$$P(\mu - 3\sigma < N < \mu - 0{,}5\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu-0{,}5\sigma} \frac{1}{2{,}598\cdot 10^{11}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x-5{,}24\cdot 10^{23}\right)^2}{2\cdot 6{,}754\cdot 10^{22}}} dx = 0{,}3072 = 30{,}72\% \qquad (65)$$

La interpretación de este resultado es que la probabilidad de que el número de núcleos supervivientes se encuentre entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu - 0{,}5\sigma$ es del 30,72%. De esta manera, queda determinada también la forma en la que se puede calcular la probabilidad de supervivencia de cualquier rango que se desee conocer, no solo del más probable como hizo en el apartado (f). Si se quisiera conocer la probabilidad individual de un número de núcleos en concreto se podría realizar una interpolación asintótica del mismo tipo que se realizó en (14) para el caso más probable.

En este apartado también es interesante calcular la probabilidad de que sobrevivan $\mu \pm 3\sigma$ mediante la resolución de la integral de densidad de probabilidad para comprobar que, efectivamente, el resultado es del 99,7% como establece la bibliografía y como hemos hecho uso en el apartado (f). De esta manera quedan correlacionados todos los conceptos estudiados en este artículo sin errores conceptuales ni posibles lagunas en el proceso de aprendizaje.

## IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un estudio cuantitativo sobre la naturaleza estadística y probabilística de la ley de desintegración radiactiva, lo cual no suele realizarse y genera errores de concepto en el estudiantado.

En primer lugar, se ha deducido la ley de desintegración radiactiva y se ha realizado el estudio teórico de su naturaleza probabilística. Suponiendo que los núcleos radiactivos se desintegran de forma independiente, la distribución binomial modela a la perfección este fenómeno, pudiendo determinar el valor y la probabilidad del número de núcleos supervivientes en todo el espacio muestral. Con la media y la desviación típica de esta distribución observamos el valor más esperado de núcleos supervivientes y la dispersión de los mismos. Sin embargo, cuando el número de núcleos es muy elevado no se puede utilizar la distribución binomial debido a problemas de cálculo numérico en los factoriales. Por ello, se ha mostrado en el artículo una manera de interpolar asintóticamente una función que permita calcular la probabilidad del caso más esperado sin necesidad de recurrir a la expresión de la distribución binomial. Esta interpolación muestra que, a medida que hay más muestras, la probabilidad de supervivencia del caso más probable disminuye, lo cual indica que, para un número de núcleos muy elevado, la probabilidad individual del caso más probable será despreciable y lo que nos interesará es la probabilidad del rango más probable.

Para abordar este tema, se proponen otras distribuciones a las que tiende la binomial cuando el número de muestras es muy elevado. La primera es la distribución de Poisson, que en la bibliografía y en procesos experimentales puede ser muy útil, pero para el fin que buscamos no es la idónea por las restricciones que requiere su aproximación respecto a la binomial. La segunda es la distribución normal o gaussiana, mediante la cual transformamos un proceso estadístico de variable discreta en uno de variable continua para poder calcular la probabilidad en un rango determinado. En el artículo se especifica el rango en el que la probabilidad es más probable, así como la manera de calcular la probabilidad del rango que se desee.

Para finalizar el apartado teórico se presenta un diagrama de flujo sobre el proceso estadístico de desintegración radiactiva que resume todo lo expuesto en este apartado.

En segundo lugar, se ha propuesto un ejemplo práctico de aplicación didáctica mediante el cual se pretende introducir progresivamente todos los conceptos explicados en el apartado teórico mediante casos numéricos. En el apartado (a) se muestra la necesidad de definir el número de núcleos supervivientes como una variable aleatoria; en el (b) se hace uso de la distribución binomial para modelar un proceso de desintegración radiactiva; en el (c) se observa que la ley de desintegración radiactiva proporciona el caso más probable de núcleos superviviente; en el (d) se muestra la problemática numérica de la distribución binomial cuando el número de muestras es muy elevado y se hace uso de la interpolación asintótica presentada en este artículo; en el apartado (e) se calculan e interpretan parámetros estadísticos como media, varianza y desviación típica; en el apartado (f) se determina el rango de núcleos supervivientes más probable; y en el apartado (g) se calcula la probabilidad de supervivencia de un rango determinado de núcleos que no incluye el caso más probable.

Por lo tanto, con todo lo expuesto, queda realizado un estudio cuantitativo de la naturaleza estadística y probabilística de la ley de desintegración radiactiva que muestra y clarifica dicho carácter probabilístico y estadístico de este fenómeno físico, para que estudiantes y profesores comprendan y trabajen adecuadamente con estos conceptos sin necesidad de simplificar en exceso los fundamentos físicos y matemáticos necesarios para su estudio, evitando así graves errores conceptuales sobre este proceso físico.

Asimismo, sería útil e interesante utilizar herramientas TIC en el aula, como simuladores o entornos interactivos que permitan visualizar los conceptos expuestos y faciliten la comprensión del carácter probabilístico de la desintegración radiactiva, proporcionando a los estudiantes una experiencia más práctica y dinámica en el análisis de este fenómeno. La implementación de estas herramientas se reserva para futuros trabajos.

## REFERENCIAS

Alonso, M., & Finn, E. J. (1986). *Física, Volumen III: Campos, Ondas y Radiaciones*. Buenos Aires: Addison-Wesley Iberoamericana.

Burcham, W. E. (2003). *Física Nuclear*. Barcelona: Reverté.

Campbell, S., & Duarte, J. (2008). *Poisson Statistics of Radioactive Decay*. Massachusetts: MIT Department of Physics.

Ehmann, W. D., & Vance, D. E. (1991). *Radiochemistry and Nuclear Methods of Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Fernández de la Mora, J. (2002). *Introducción a la mecánica estadística y sus aplicaciones en la física*. Madrid: Pirámide.

Huang, K. (1987). *Introducción a Mecánica Estadística*. Barcelona: Reverté.

Huestis, S. P. (2002). Understanding the Origin and Meaning of the Radioactive Decay Equation. *Journal of Geoscience Education*, 524-527.

Krane, K. S. (1987). *Introductory Nuclear Physics*. New York: John Wiley & Sons.

Mamane, A., & Benjelloun, N. (2019). Development and Experimentation of New Mathematical Model for Teaching-Learning the Radioactive Decay. *Education Sciences,* 9(2), 123. https://doi.org/10.3390/educsci9020123

Morrison, D. F. (2003). *Estadística Aplicada para ingeniería y Ciencias*. Barcelona: Prentice Hall.
Prather, E. (2005). Students' Beliefs About the Role of Atoms in Radioactive Decay and Half-life. *Journal of Geoscience Education*, *53*(4), 345–354. https://doi.org/10.5408/1089-9995-53.4.345

Ross, S. M. (2012). *Introducción a la Probabilidad y Estadística para Ingenieros y Científicos*. Madrid: Elsevier.

Tipler, P. A., & Llewellyn, R. A. (2009). *Física Moderna*. Barcelona: Reverté.

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros y Científicos*. Madrid: Pearson Educación.

Yesiloglu, S. N. (2019). Investigation of pre-service chemistry teachers' understanding of radioactive decay: a laboratory modelling activity. *Chemistry Education. Research and Practice*, 20, 862-872.