

## El GPS y la Teoría de la Relatividad <sup>1</sup>

Eduardo Huerta<sup>1</sup>, Carlos Galles<sup>2</sup>, Andrés Greco<sup>2</sup> y Aldo Mangiaterra<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Geotopocartografía - <sup>2</sup> Departamento de Física  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario  
huerta@fceia.unr.edu.ar

*La utilización del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) para determinaciones instantáneas de coordenadas de puntos respecto de un sistema de referencia fijo a la Tierra, permite actualmente lograr precisiones de unos pocos metros. Para lograr este grado de precisión es imprescindible la consideración de la teoría de la relatividad concebida por Albert Einstein a comienzos del siglo pasado.*

*Se puede afirmar que sin la física de Einstein, el GPS tal como lo conocemos hoy, no sería posible ya que si los efectos relativistas no fueran tenidos en cuenta, en pocos minutos su influencia sobre los relojes de los satélites producirían errores que superarían ampliamente la precisión señalada.*

*En este trabajo, en primer lugar, se describen las características básicas del sistema. Posteriormente se explican los principios fundamentales de la teoría de la relatividad restringida y general de una manera sencilla y accesible para un lector no formado en esta rama de la física. Luego se establece la correspondencia entre la teoría de Einstein y el Sistema de Posicionamiento Global y se cuantifican, en base a algunas hipótesis simplificadoras, las variaciones temporales predominantes que indican, en términos de distancias, alteraciones cuya consideración resulta crucial para un adecuado funcionamiento del sistema, señalando finalmente, cómo se logran compensar estas alteraciones.*

**Palabras clave:** Sistema de Posicionamiento Global - GPS - Teoría de la Relatividad Restringida  
Teoría de la relatividad General - compensación de variaciones temporales

*The use of the Global Positioning System (GPS) to instantly determine the coordinates of a reference system fixed on the Earth, allows at present to obtain accuracies of some meters. To achieve this accuracy is imperative to take into account the Theory of Relativity proposed by Albert Einstein at the beginning of latest century. The use of this theory overcomes errors on the satellite clocks that could lead to errors in that accuracy.*

*In this paper, at first place, basic characteristics of the GPS are presented, then fundamental principles of the Special and General Theory of Gravity are explained in a simple way. Afterwards, the correspondence between Einstein's theory and GPS are established, and time variations are estimated in terms of distances. Finally, it is shown how these variations are compensated.*

**Keywords:** Global positioning System - GPS - Special Theory of Relativity - General Theory of Relativity  
compensation of time variations.

### Introducción:

El lanzamiento y puesta en órbita del satélite Sputnik I marcó, en 1957, el comienzo de la era espacial que, conjuntamente con la aparición de los primeros relojes atómicos, pocos años después, han posibilitado que en la actualidad se encuentren en operaciones los denominados Sistemas de Navegación Global por Satélites (GNSS).

Aunque GPS (Global Positioning System)

es el sistema de navegación basado en satélites que actualmente brinda mayores prestaciones, se halla operativo también el Glonass (Global Navigation Satellite System), de origen ruso, encontrándose además en desarrollo el sistema Galileo de origen europeo.

Es ampliamente conocido que esta tecnología satelital permite determinar, con precisiones que van desde la decena de metros a algunos milímetros, la posición espacial de objetos fijos o móviles respecto de un sistema

1 El contenido de este artículo apareció anteriormente en *Topografía y cartografía: Revista del Ilustre Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía*, ISSN 0212-9280, Vol. 24, N° 140, Año 2007, pág. 22-31. Se publica ahora con la aquiescencia de la dirección de dicha revista española.

de referencia fijo a la Tierra.

La alta eficiencia, confiabilidad y versatilidad del sistema han generado un vasto campo de aplicaciones en diversas actividades humanas entre las cuales podemos enumerar: aeronavegación, navegación marítima, fluvial o terrestre, la exploración y explotación de recursos naturales, la prevención y observación de los desastres naturales, la construcción de obras de ingeniería, el ordenamiento territorial, etc.

También realiza aportes científicos de gran importancia a través de la información que provee acerca de la física de los componentes utilizados en los modelos de observación: ionosfera, troposfera, movimientos y deformaciones de la corteza, etc.

El segmento espacial de GPS consta, a la fecha, de 32 satélites en órbitas casi circulares que se encuentran a unos 20180 kms de altura respecto de la superficie terrestre. Estos satélites están distribuidos en seis planos orbitales equiespaciados en longitud cuya inclinación respecto del plano ecuatorial es de 55 grados (Figura 1). Su período orbital es de 12 horas sidéreas lo que implica que se mueven con una velocidad cercana a los 14000 kilómetros por hora.

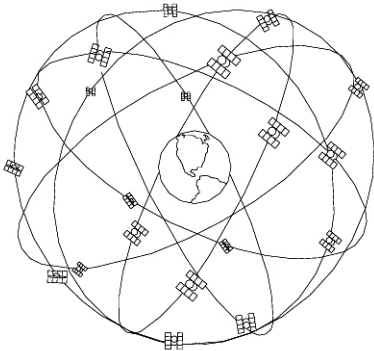


Figura 1 - Distribución de los satélites que participan del sistema GPS.

Los satélites emiten señales caracterizadas por un cierto número de componentes todas basadas en una frecuencia fundamental de 10,23 MHz controladas por relojes que se encuentran a bordo (en realidad osciladores atómicos) de gran estabilidad.

El segmento de control identificado por las siglas OCS (Operational Control System) está integrado por diez estaciones terrestres que rastrean los satélites con el objeto de determinar los parámetros orbitales de cada uno de ellos y también determinar el comportamiento de los relojes que se encuentran a bordo de cada vehículo espacial. Una de estas estaciones, ubicada en la Base de la Fuerza Aérea Schriever en el Estado de Colorado (USA), denominada *Estación de Control Maestra* (MCS), define la escala de tiempo GPS (GPS time) a través de un reloj atómico que se utiliza como referencia. Esta estación además recopila todas las observaciones y las procesa produciendo información vital para el posicionamiento, transmitiendo los resultados obtenidos a antenas que los transfieren a través de un enlace vía banda S a cada uno de los satélites.

Los receptores utilizados por los usuarios finalmente reciben, como parte de la señal emitida por cada satélite, la información procesada por el OCS. Este bloque de información es denominado *mensaje de navegación* y permite, a partir de los parámetros orbitales, calcular la posición de cada satélite en la época de observación.

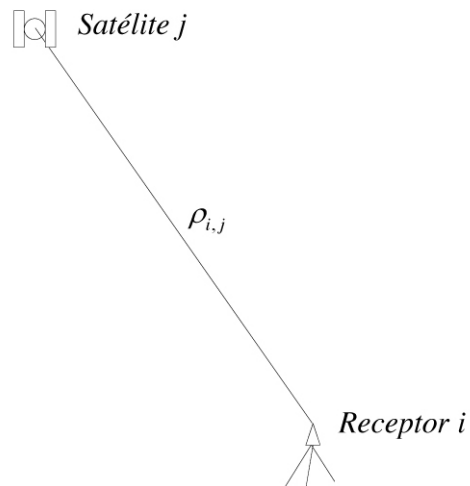


Figura 2 - Ilustración del principio del posicionamiento satelital

Por otro lado, es posible medir, para la misma época, las distancias del receptor a varios satélites lo que permite calcular su propia posición. La observación básica que permite estas determinaciones es el tiempo empleado por las señales en recorrer la distancia entre cada satélite y el receptor por lo que quedan involucradas las escalas de tiempo del reloj de cada satélite y la del reloj de la estación receptora ubicada sobre la superficie terrestre. La Figura 2 ilustra el principio de posicionamiento satelital. Si:

- $x_i, y_i, z_i$ : coordenadas del receptor.
- $x_j, y_j, z_j$ : coordenadas del satélite
- $\rho_{i,j}$ : distancia receptor-satélite

$$\rho_{i,j}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \Bigg\} (1)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n \quad , \text{ para } n \geq 3$$

Sistema de n ecuaciones con n incógnitas

El receptor dispone de un oscilador para definir su propia escala de tiempo, que por razones de costos, tiene una estabilidad muy inferior a la de los que se encuentran en cada uno de los satélites. Esto introduce en cada observación un importante error en la medición de la distancia. Afortunadamente el error en el reloj de receptor es fácilmente calculable si se observan un mínimo de cuatro satélites ya que su valor es único para cada época de observación y por lo tanto se puede calcular adicionándolo como incógnita al sistema de ecuaciones indicado con (1) (Huerta, 2005).

Las precisiones requeridas para el posicionamiento son muy diversas y dependerán fundamentalmente de la aplicación. Por esto es necesario modelizar el conjunto de los errores involucrados en las observaciones para disminuir su influencia y llevarlas a valores aceptables. A modo de ejemplo podemos mencionar como fuentes de error a: los producidos por los estados de los relojes de los satélites en el momento de la observación respecto del tiempo GPS, las alteraciones que produce la atmósfera en la propagación de las señales y los errores en los parámetros orbitales.

Existe gran cantidad de bibliografía donde se estudian minuciosamente efectos que, de no

considerarse, conducirían a errores de medición que afectarían al posicionamiento satelital. Sin embargo, se encuentra en general, brevemente mencionado en muchos casos, e ignorado en otros, el estudio de los efectos relativistas sobre el sistema. En efecto, la observación de la frecuencia atómica fundamental de los satélites debe corregirse por la relatividad especial (velocidad del satélite respecto del receptor) y por la relatividad general (diferencia entre el potencial gravitatorio de cada satélite y el potencial sobre la superficie terrestre). El rol de la relatividad es tal que resulta inevitable su consideración para lograr un adecuado funcionamiento del sistema.

El propósito de este artículo es intentar brindar a los usuarios del sistema, que en general son profesionales de muy variada formación, de una manera simple y accesible los conceptos básicos fundamentales de la teoría de la relatividad, su relación con los sistemas de posicionamiento satelitales, y la forma de considerar sus efectos en el sistema.

### Relatividad Restringida

La teoría de la relatividad trata sobre cómo relacionar las observaciones hechas en diferentes sistemas de referencia. En el caso de la Relatividad Restringida se consideran sistemas que se mueven a velocidad constante.

Recordemos como se transforman coordenadas entre dos sistemas de referencia en Mecánica elemental. Supongamos que uno de ellos está en reposo ( $0, y, x$ ) y el otro ( $0', y', x'$ ) movimiento uniforme con velocidad  $v$  como se muestra en la Figura 3.

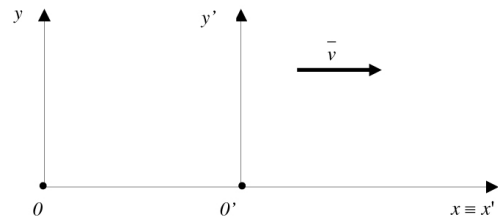


Figura 3 - Dos sistemas de referencia: uno en reposo y el otro se mueve con una velocidad  $v$  respecto del primero

Si además se supone que los orígenes de coordenadas,  $0$  y  $0'$ , estaban superpuestos cuando se empieza a contar el tiempo  $t$ , las fórmulas que dan el paso del sistema en reposo al sistema en movimiento son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \end{aligned} \right\} (2)$$

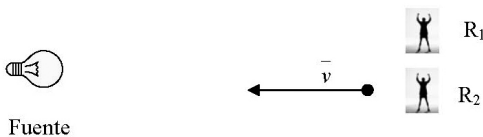
Donde se supone que el tiempo es un valor universal que fluye igual para ambos sistemas. Estos sistemas son los que en Física se denominan *sistemas inerciales*, sistemas que se mueven los unos respecto de los otros con velocidades constantes a lo largo del tiempo y en los cuales valen las leyes de Newton de la Mecánica. De lo contrario el sistema será llamado no inercial.

**Los postulados de Einstein**

La teoría de la relatividad de Einstein está basada en dos hipótesis:

- 1) No es posible detectar el movimiento absoluto y uniforme.
- 2) La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente.

Una primera consecuencia de estas hipótesis es la siguiente. Se supone que se tienen una fuente de luz y dos observadores,  $R_1$ , en reposo respecto de la fuente, y  $R_2$  que se aproxima a ella con velocidad  $v$ , tal cual se muestra en la Figura 4.



*Figura 4 - El observador 1 está en reposo respecto de la fuente de luz, mientras que el observador 2 se acerca con una velocidad  $v$ .*

Es evidente que  $R_1$  mide la velocidad de la luz  $c$ , pero  $R_2$ , si es que se confía en las hipótesis precedentes, no mide  $c + v$ , sino  $c$ . El sistema de observadores precedente es equiva-

lente, por aplicación de la hipótesis 1, al descrito en la Figura 5 donde para el observador  $R_2$ , el observador  $R_1$  se desplaza hacia la derecha con velocidad



*Figura 5 - El observador 1 se aleja de la fuente de luz con velocidad  $v$ , mientras que el observador 2 permanece en reposo.*

Por aplicación de la hipótesis 2 tenemos que  $R_2$  medirá también  $c$ , pues la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente.

Se tiene entonces la siguiente conclusión importante:

“Todo observador mide el mismo valor para la velocidad de la luz independientemente del movimiento relativo entre la fuente y el observador”

Estas ideas tienen especial importancia para el caso que nos preocupa pues las señales electromagnéticas, que son enviadas desde los satélites para comunicar sus parámetros a los observadores en tierra, se mueven todas a una misma velocidad, la de la luz, sin importar la velocidad del emisor.

**Sincronización habitual de relojes**

En los diferentes países se sincronizan los relojes de la población de acuerdo a un procedimiento que incluye enviar mediante ondas de radiofonía desde la ciudad capital la señal horaria con la cual se ponen en hora los relojes. Es un procedimiento que tiene sus inconvenientes, como veremos a continuación con un ejemplo.

Dado que la velocidad de la luz es de 300000 Km/seg, imaginemos un país de grandes dimensiones, lo cual hará los cálculos más sencillos. Supongamos que la Ciudad 1 dista de la Capital una distancia de 300000 Km y que 300000 Km más allá se encuentra la Ciu-

dad 2. Todas las ciudades se encuentran además sobre una línea recta. Es fácil comprobar que cuando la señal horaria que indica la hora cero llega a la Ciudad 2 (y los relojes de esta ciudad se colocan a esa hora), ya en la Ciudad 1 los relojes marcan 1 segundo y en la Capital los relojes marcan 2 segundos. Señales de luz emitidas a la misma hora en la Capital y en la Ciudad 2 no llegan simultáneamente a la Ciudad 1, que sin embargo se encuentra a mitad de camino entre ambas. Se concluye entonces que los relojes no están correctamente sincronizados cuando se usa el método habitual. Por supuesto que para las aplicaciones comunes, con trenes y automóviles que se mueven aproximadamente a solo diezmillonésimos de la velocidad de la luz, en países que tienen a lo sumo algunos miles de Km en su longitud máxima, este es un error de poca importancia.

**Sincronización de relojes de Einstein**

Sean A y B dos relojes idénticos separados por una cierta distancia. Para sincronizarlos Einstein propone el siguiente mecanismo. Se envía desde A un flash de luz en el instante  $t_A$  (medido en el reloj A), la luz que llega a B, cuando este reloj mide el tiempo  $t_B$ , es reflejada y vuelve a A en el instante  $t_A$ . Los relojes están sincronizados cuando se cumple la siguiente igualdad:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

Es fácil convencerse de que este procedimiento no tiene las desventajas del anterior (Einstein-Infeld, 2003).

**Dilatación del tiempo**

Este es un famoso resultado de la teoría de Einstein que será, para nuestro propósito, de mucha utilidad en nuestras consideraciones sobre el sistema GPS. Para visualizarlo se usa el llamado “reloj de luz” (Tipler, 2000).

El susodicho reloj consiste en el siguiente dispositivo (Figura 6): sobre el piso de una caja se tiene un destellador y en el techo, a una distancia D, un espejo. Cada vez que la luz

culmina su viaje de ida y vuelta el destellador vuelve a emitir un nuevo flash de luz. El tiempo que pasa entre flashes es el tic del reloj.

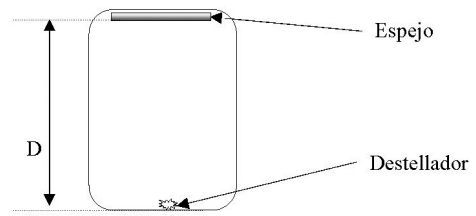


Figura 6 - Dispositivo “reloj de luz” en reposo respecto del observador.

Cuando el reloj está en reposo el tiempo que media entre dos flashes vale:

$$\Delta t' = \frac{2D}{c} \quad (3)$$

Si ahora se supone el reloj en movimiento será ese mismo tiempo el que mida el observador que viaja a la misma velocidad que el reloj, instalado en la caja por así decirlo. Por el contrario el observador en reposo, que ve pasar el reloj por delante suyo, mide algo muy distinto. Para él la situación está representada en la Figura 7. Mientras el destello de luz marcha hacia el espejo situado en el techo, la caja va desplazándose hacia la derecha y por lo tanto el destello alcanza al espejo en una posición distinta de la inicial. Un razonamiento similar vale para el viaje de vuelta desde el espejo al suelo.

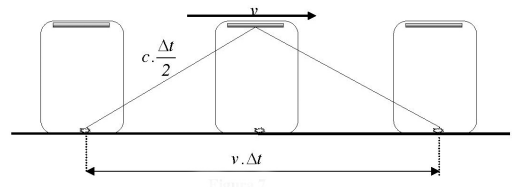


Figura 7 - Dispositivo “reloj de luz” moviéndose a una velocidad v respecto del observador.

Se llama  $\Delta t$  al tiempo que media desde la

partida del destello hasta su vuelta al destellador, medido por un observador en reposo. Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$\left(c \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 \quad (4)$$

De donde 
$$\Delta t = \frac{2D}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

Usando la ecuación (3)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

Por lo tanto el observador que ve pasar el reloj en movimiento mide entre los sucesos un intervalo mayor que el que viaja junto al reloj. Interpretará este resultado diciendo que el reloj en movimiento atrasa.

Definiendo la frecuencia como  $f = \frac{1}{\Delta t}$ :

se tendrá de la ecuación (6):

$$f = f' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

Desarrollando en serie la raíz cuadrada y tomando sólo los dos primeros términos:

$$f = f' \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (8)$$

que en términos de frecuencia relativa lleva a

$$\frac{f - f'}{f'} = \frac{\Delta f}{f'} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (9)$$

La ecuación (9) muestra que el observador en reposo medirá en el reloj en movimiento una frecuencia menor a la propia de éste.

Notemos además que en este sencillo cálculo resulta de la aplicación de los postulados de Einstein pues se ha considerado que la velocidad de la luz es independiente del hecho que el destellador de donde parte esté en movimiento o de que el espejo en el cual se refleja el haz de luz también esté en movimiento. Por otra parte para medir el intervalo  $\Delta t$  el observador en reposo necesitará tener relojes sincronizados con el método einsteniano a lo largo del eje x.

## Relatividad General

Siguiendo a Einstein (Feynman, 1976) se considerará un observador dentro de un ascensor y se estudiarán las conclusiones que él puede extraer en diferentes circunstancias.

Si el ascensor está en reposo en el campo gravitatorio terrestre el observador podrá verificar experimentalmente la existencia de dicho campo; por ejemplo si suelta una moneda verá como ésta cae al suelo con una aceleración  $g$ .

Si el ascensor está en caída libre, el observador que va dentro del mismo observará que al soltar la moneda ésta no se mueve respecto al piso del ascensor. El observador dirá entonces que se encuentra en una región del espacio libre de campos gravitacionales. Se comprobará entonces que acelerando convenientemente el ascensor es posible eliminar el campo gravitacional observado por quien está dentro del ascensor.

Se supone ahora un experimento ideal en el cual la caja del ascensor se encuentra en una región del espacio donde el campo gravitacional es nulo. Si en estas condiciones se aplica al ascensor una fuerza externa constante en el sentido del piso al techo con la cual se logra una aceleración  $g$  se creará en el observador la ilusión (certificada experimentalmente) de estar sumergido en un campo gravitatorio: si suelta una moneda la verá aproximarse al suelo con una aceleración  $g$ .

Concluimos entonces que tanto el observador en un sistema acelerado en el espacio libre de campo gravitatorio como el observador que está en un sistema en reposo sumergido en un campo gravitacional obtienen los mismos resultados cuando hacen un experimento de caída libre.

Veamos en particular qué sucede con un rayo de luz que entra en forma horizontal en el ascensor acelerado. Para el observador ubicado en el interior del ascensor, el rayo de luz debe recorrer una trayectoria curva. Por lo tanto, siguiendo la analogía, lo propio debe suceder a un rayo de luz en un campo gravitatorio.

En lo que sigue se trata de aplicar estas



ideas a un caso muy sencillo pero con implicancias para las mediciones de tiempos en el sistema GPS.<sup>1</sup>

Consideremos en primer lugar un ascensor, en reposo respecto de un sistema inercial, en el cual se han colocado dos relojes sincronizados, uno de ellos en el piso (A) y el otro en el techo (B) separados por una distancia  $H$  (Figura 8).

Si desde B se emiten destellos luminosos separados por intervalos de un segundo resulta evidente que A los recibirá con la misma cadencia.

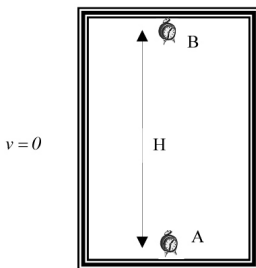


Figura 8 - Ascensor en reposo, con los relojes sincronizados

Considerando ahora el caso en que el ascensor se mueve hacia arriba con una aceleración  $g$  desde el instante cero (Figura 9).

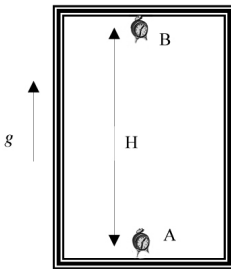


Figura 9 - Ascensor moviéndose hacia arriba con una aceleración  $g$ .

La situación es ahora muy diferente a la anterior pues mientras que la luz emitida desde B, en un dado instante, está viajando, el reloj A se mueve hacia arriba. En forma aproximada el tiempo en el que la luz cubre el trayecto entre los relojes vale:

$$\Delta t = \frac{H}{c} \quad (10)$$

En ese lapso el ascensor ha aumentado su velocidad según la fórmula elemental:

$$\Delta v = g \cdot \Delta t \quad (11)$$

Esta es una situación en la cual se pueden aplicar los resultados bien conocidos del llamado efecto Doppler<sup>2</sup>; el observador en el piso medirá en la señal que recibe una frecuencia dada por la expresión:

$$f_B = f'_B \cdot \left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right) \quad (12)$$

donde  $f'_B$  es la frecuencia propia del reloj B. La expresión precedente nos muestra que visto desde A el reloj B parece marchar con mayor frecuencia.

Si llamamos  $\Delta f$  a la diferencia  $f_B - f'_B$  y hacemos uso de las fórmulas (10), (11) y (12) llegamos fácilmente a la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta f}{f'_B} = \frac{g \cdot H}{c^2} \quad (13)$$

Este es un resultado que ha sido deducido a partir de considerar un ascensor acelerado. La analogía propuesta por Einstein entre los sistemas acelerados y los sometidos a campos gravitacionales sugiere que el mismo resultado será válido para dos relojes ubicados en un campo gravitatorio.

En ese caso, entonces, se asimila  $g$  a la aceleración de la gravedad y  $H$  a la distancia vertical entre dos puntos próximos.

Por otro lado, se sabe que  $g \cdot H$  puede ser equiparado a la diferencia de potencial gravitatorio ( $\Delta\Phi$ ) entre dos puntos situados a diferente altura sobre la superficie terrestre

La expresión (13) puede generalizarse a cualquier diferencia de potencial gravitatorio

$$\frac{\Delta f}{f'} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \quad (14)$$

Esta última expresión será de utilidad para el caso del GPS donde los satélites, dada las alturas de sus orbitas, se encuentran en una región con un potencial gravitatorio muy distinto al de los receptores.<sup>3</sup>

## Aplicación de la Relatividad al GPS

Como ya se mencionara, para determinar la posición de un punto es necesario medir los tiempos empleados por las señales emitidas por satélites en recorrer la distancia que los separa de un receptor estacionado sobre el punto.

Estos tiempos permitirán determinar las distancias entre el punto y cada uno de los vehículos espaciales en la época de observación. Debido a la altísima velocidad de propagación de las señales, estos tiempos deben medirse con muy alta precisión, teniendo en cuenta que un microsegundo de error en la medición del tiempo produce un error de 300 metros en las distancias.

El tiempo de cada satélite está definido por los relojes atómicos que se encuentran a bordo de ellos, o sea que cada satélite opera en su propia escala de tiempo, eso significa que la transmisión de todos los componentes de la señal están vinculadas al tiempo de cada satélite. Sin embargo los parámetros orbitales, contenidos en el mensaje de navegación, están expresados en *tiempo GPS* establecido por el OCS.

El OCS, al monitorear en forma continua los relojes de cada satélite, además calcula los datos necesarios para relacionar el tiempo GPS y el tiempo individual de cada satélite a través de una expresión polinómica y los incluye en el mensaje de navegación que es luego recibido por el receptor.

Ahora bien, los relojes involucrados en las observaciones (de los satélites y del receptor) se mueven uno respecto de otros y están ubicados en puntos distintos del campo gravitatorio terrestre y por lo tanto es necesario considerar efectos relativistas como los discutidos anteriormente

Como ya se explicara previamente, la velocidad relativa entre el reloj del receptor y los relojes de los satélites, produce un efecto previsto por la relatividad especial (RE) que hace que los relojes de los satélites se atrasen respecto del reloj del receptor (o que disminuya su frecuencia).

Además según se vio, debido a que el

potencial gravitatorio en los satélites es menor que en la superficie de la Tierra, se produce un efecto adicional previsto por la relatividad general (RG) que adelanta los relojes de los satélites respecto del reloj del receptor.

El efecto conjunto, teniendo en cuenta las alturas orbitales y la velocidad de los satélites hace que los relojes de los mismos vayan más rápido que cualquier reloj ubicado sobre la superficie terrestre.

Por lo tanto si:  $f'_0$  es la frecuencia emitida y  $f_0$  es la frecuencia recibida en el receptor

De (9) y (14) surge que la variación relativa de frecuencia debida al efecto conjunto resultante de la velocidad con que orbita el satélite y de su posición en el campo gravitatorio será:

$$\delta^{rel} = \frac{f_0 - f'_0}{f'_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \quad (15)$$

Aceptando la hipótesis de que las órbitas son circulares y considerando la masa de toda la Tierra (M) concentrada en su centro, se tendrá que el potencial gravitatorio en un punto ubicado a una distancia  $l$  del centro será:

$$\Phi = \frac{GM}{l} \quad (16)$$

Donde  $G$  es la constante de gravitación universal.

De la expresión (16) resulta que la diferencia de potencial entre un punto ubicado sobre la superficie terrestre y otro ubicado a una altura  $h$  será:

$$\Delta\Phi = G \left[ \frac{M}{R} - \frac{M}{R+h} \right] \quad (17)$$

Reemplazando (17) en (15) se tiene:

$$\delta^{rel} = -\frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 + \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right] \quad (18)$$

Se toman los siguientes valores para realizar el cálculo efectivo de estos efectos

Velocidad media de los satélites respecto de la superficie de la Tierra:  $v = 3,98$  km/seg



Velocidad de la luz (unidades SI ):  $c = 299792,458$  km/seg

Constante de gravitación universal  $x$  de la Tierra incluyendo la masa de la atmósfera (WGS84):  $GM = 398600,4$  km<sup>3</sup>/seg<sup>2</sup>

Radio medio de la Tierra:  $R = 6371$  km

Altura media de los satélites:  $h = 20200$  km

Llamando: 
$$\delta_{gen}^{rel} = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right]$$

y 
$$\delta_{esp}^{rel} = -\frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2$$

Resulta: 
$$\delta_{gen}^{rel} = 5,2921 \cdot 10^{-10}$$

y 
$$\delta_{esp}^{rel} = -8,812 \cdot 10^{-11}$$

es decir 
$$\delta^{rel} = 4,4109 \cdot 10^{-10}$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia nominal de los osciladores atómicos es  $f_0 = 10,23$  MHz, se producirá entonces un desplazamiento de la frecuencia de:

$$f'_0 - f_0 = 0,00451 \text{ Hz}$$

Este efecto, que representa el efecto relativista predominante en las observaciones, se compensa disminuyendo en  $0,00451$  Hz la frecuencia nominal de los relojes de todos satélites de la constelación, antes de su lanzamiento.

A través de esta metodología se introduce una corrección constante para los relojes a bordo de todos los satélites.

Resulta interesante calcular la alteración que la variación de frecuencia genera en términos de tiempo. En efecto, considerando el efecto acumulado durante un período de tiempo, por ejemplo, 24 horas resultará:

$$\Delta t_{esp}^{rel} = 7,6 \text{ } \mu\text{seg}$$

$$\Delta t_{gen}^{rel} = -45,7 \text{ } \mu\text{seg}$$

Es decir que el efecto conjunto diario será:  $\Delta t^{rel} = -38,1 \text{ } \mu\text{seg}$  el cual se traduce en una alteración en la distancia de 11400 metros.

## Conclusiones

La teoría de la relatividad restringida (TRR) y la teoría de la relatividad general (TRG) fueron presentadas por Albert Einstein en 1905 y 1916 respectivamente.

La TRR fue contrastada con éxito en numerosas experiencias y luego incorporada a otras teorías físicas, la electrodinámica cuántica por ejemplo, en forma tal que se fue convirtiendo en una herramienta de uso habitual por parte de los físicos. En cambio la TRG fue aceptada más sobre la base de su solidez conceptual y belleza formal que por sus conclusiones susceptibles de ser sometidas a comprobación experimental. Durante decenios sólo se hablaba de tres tests efectivos para esta teoría: la explicación de la precesión anómala de Mercurio, el desplazamiento al rojo del espectro de la luz de las estrellas y la desviación de los rayos de luz al pasar en las cercanías del Sol. Sólo en los últimos treinta años se ha comenzado a lograr la integración de la TRG con otras teorías físicas y se ha acrecentado el número de observaciones experimentales, principalmente en el campo de la Astrofísica.

Ambas teorías parecían sin embargo tener que permanecer por siempre en el más recolecto ambiente académico y no se vislumbraba una aplicación difundida de ellas en la vida cotidiana. Esta situación cambió cuando fueron introducidos los relojes atómicos, los cuales permitieron la medida de intervalos de tiempo con una precisión hasta entonces inimaginable. De esta forma ciertos efectos de pequeño porte previstos por las teorías relativísticas pudieron ser comprobados y al ser introducido el sistema de posicionamiento global fue forzoso tenerlos en cuenta para que el sistema alcanzase la precisión requerida en las diferentes aplicaciones.

En este artículo hemos presentado los dos efectos relativísticos más importantes: el cambio de frecuencia de los relojes en movimiento

(efecto típico de la TRR) y el cambio de frecuencia de los relojes en diferentes potenciales gravitatorios (efecto típico de la TRG). Estas consideraciones al ser aplicadas al Sistema de Posicionamiento Global permiten salvar errores sistemáticos que, si se ignorasen, derivarían en una perturbación del orden de 11 km. diarios en la medición de la distancia satélite-receptor.<sup>4</sup>

Creemos que esta aplicación cotidiana, y cada día más masiva, de las teorías relativísticas es una demostración de la penetración en la producción de nuevas tecnologías de las teorías forjadas en los laboratorios y en las mentes de los científicos.

## Notas

<sup>1</sup> Seguimos esencialmente a Feynman, 1976

<sup>2</sup> El efecto Doppler se observa, por ejemplo, cuando una ambulancia se aproxima, su sirena, parece emitir un sonido más agudo (mayor frecuencia) que cuando se aleja.

<sup>3</sup> El lector interesado en conocer más sobre la teoría de la relatividad puede tener un acceso didáctico escrito por el mismo Einstein en la obra mencionada en la bibliografía [Einstein, 1916].

<sup>4</sup> Para profundizar sobre la relación entre la teoría de la relatividad y el Sistema de Posicionamiento Global se recomienda el artículo Ashby 2002

*Apéndice*

Los considerados hasta ahora no son los únicos efectos a tener en cuenta, ya que existen otras pequeñas alteraciones debidas a la relatividad [Hofmann et al.,1994]. Entre ellas, se comenta el efecto adicional producido por pequeñas excentricidades en las órbitas de los satélites (que en todos los casos observados es inferior a 0.02) y que son provistas por el sistema para cada uno de los satélites a través del mensaje de navegación.

Las excentricidades de las órbitas mencionadas producen un pequeño efecto relativista adicional que es necesario considerar en el procesamiento. En este caso la corrección dependerá de la posición y de la velocidad del satélite cambiando por lo tanto a lo largo de su trayectoria [Leick, 1994].

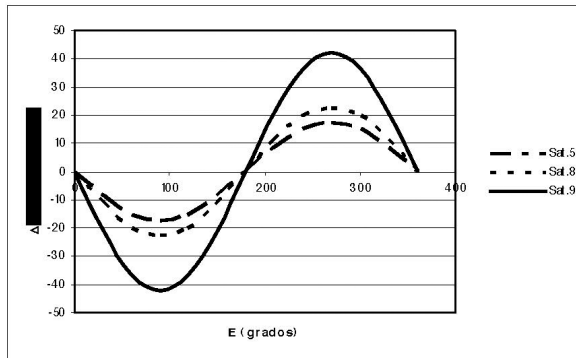
Afortunadamente el término correctivo puede calcularse mediante una sencilla expresión, como una función del semieje mayor de la órbita  $a$ , de la excentricidad  $e$  y de la anomalía de excentricidad  $E$  dada por la expresión:

$$\Delta t_e(\text{seg}) = -4.443 \cdot 10^{-10} \sqrt{a} \cdot e \cdot \text{sen}E$$

Con los siguientes datos de navegación obtenidos en la estación permanente UNRO el 3-12-2006 para los satélites 5, 8 y 9.

Satélite	5	8	9
$e$	0.00765	0.0099322	0.01848
raíz( $a$ )	5153.7	5153.6	5153.7

Se obtuvieron los siguientes resultados para este efecto variando  $E$  entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  que corresponden a una revolución de cada satélite (Figura 10)



*Figura 10 - Resultados obtenidos incluyendo el efecto de las pequeñas excentricidades en las órbitas de los satélites*

## Referencias

- Ashby, N. (2002), "Relativity and the Global Positioning System", *Physics Today*, 2002, P. 41.
- Einstein, A. *Relativity: The Special and General Theory*. Se puede encontrar este texto de divulgación, escrito por Einstein en 1916, en varios sitios de Internet, por ejemplo en [www.marxists.org/reference/archive/einstein/works/1910s/relative/relativity.pdf](http://www.marxists.org/reference/archive/einstein/works/1910s/relative/relativity.pdf) -
- Einstein, A., Infeld, L. (2003), *La física, aventura del pensamiento*, Buenos Aires: Losada.
- Feynman R. (1976), *The Feynman lectures on physics*, vol. 2, Willmington: Mc. Graw Hill.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., and Collins, J. (1994). *Global Positioning System. Theory and Practice*. Third edición. Wien: Springer.
- Huerta E., Mangiaterra, A., Noguera, G. (2005). *GPS Posicionamiento Satelital*. Rosario: UNR Editora.
- Leick, A. (1994), *GPS Satellite Surveying*. Second Edition. Hoboken: J. Wiley & Sons.
- Tipler, P. (2000) *Física*, Barcelona: Reverté.