

Una deducción analítica simple de la hodógrafa para el problema de Kepler

Hernán Gonzalo Asorey¹, José Ignacio Castro² y Arturo López Dávalos³

¹Instituto Balseiro (UNCU-CNEA), Centro Atómico Bariloche (CNEA), CONICET, Argentina.

²Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina.

³Universidad Nacional de Río Negro, Bariloche, Argentina.

REVISTA
DE
ENSEÑANZA
DE LA
FÍSICA

E-mail: alopezdavalos@unrn.edu.ar

Recibido el 15 de julio de 2014; aceptado el 2 de setiembre de 2014

Resumen

En la literatura es posible encontrar diversas deducciones didácticas de la órbita en el problema de Kepler. También, aunque en menor medida, es posible encontrar deducciones geométricas de la hodógrafa. Sin embargo, y a pesar de su importancia pedagógica, las deducciones analíticas de esta curva no son abundantes. Más aún la existencia de ese elemento no siempre es mencionada en los libros de texto. En este trabajo presentamos una deducción analítica sencilla de la hodógrafa, directamente a partir de las leyes de Newton del movimiento. Damos una expresión general para esta figura para las tres posibles trayectorias, acotadas (elipse y circunferencia) y no acotadas (parábola e hipérbola). También damos expresiones explícitas para el radio y la posición del centro en términos de los parámetros dinámicos del movimiento.

Palabras clave: Hodógrafa. Problema de Kepler, Fuerza central, Mecánica, Leyes de Newton

Abstract

Various didactic derivations of the hodograph for Kepler problem can be found in the literature. Also, geometrical deductions of the hodograph are common. However, despite its educational importance, analytical derivations of this curve are not abundant. Moreover the existence of that element is not always mentioned in textbooks. We present here a simple analytical derivation of the hodograph, directly from Newton's laws of motion. We give a general expression for this figure for the three possible trajectories, bounded (ellipse and circle) and unbounded (parabola and hyperbola). We also give explicit expressions for the radius and the center position in terms of the dynamic parameters of the motion. [Times New Roman 9]

Keywords: Hodograph, Kepler problem, Central force, Mechanics, Newton's laws.

I. INTRODUCCIÓN

A través de un estudio detallado de los datos sobre el movimiento planetario reunidos por Tycho Brahe, en 1619 Johannes Kepler completó la publicación de las tres leyes que gobiernan el movimiento planetario:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas y Sol ocupa uno de los focos.
2. El radio vector que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período del planeta es proporcional al cubo de la distancia media al Sol.

Kepler encontró estas leyes empíricamente y no sabía cuál era la razón detrás de ello. La explicación fue dada cuarenta años más tarde por Isaac Newton. Sabemos que la trayectoria en el espacio real para un planeta u otro cuerpo masivo atraído por el Sol puede ser una elipse, una hipérbola o una parábola dependiendo de las condiciones iniciales; también es un hecho conocido que la curva descrita en el espacio de las velocidades por el vector velocidad es una circunferencia. Inversamente, también sabemos que esta forma particular de la hodógrafa sólo se presenta para una fuerza central cuya intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de fuerzas.

Esta curva fue deducida por primera vez por Hamilton (1846) y más tarde utilizada por Maxwell (1876) en conexión con la dinámica de las órbitas. Existen muchas deducciones geométricas de la hodógrafa, la más conocida de las cuales es la *clase perdida* de Feynman (Goodstein, 1996, Beckman

2006). Kepler intentó por mucho tiempo explicar las observaciones de Tycho Brahe suponiendo que la órbita de Marte era circular. Con gran desilusión debió aceptar que no era así. Suele decirse que, con la hodógrafa, Hamilton reconcilió a Kepler, post mortem, con su búsqueda de la belleza en la circunferencia: esta no estaba en la órbita sino en esa nueva curva.

A pesar de su interés pedagógico, las deducciones analíticas de la hodógrafa son escasas y no fácilmente localizables. El objetivo de este trabajo es presentar una deducción analítica sencilla basada directamente en las leyes de Newton.

Cuando un planeta o satélite describe una *órbita circular*, el módulo de la velocidad es constante y por ello la variación del vector velocidad se reduce a una rotación uniforme alrededor del origen, en el espacio de velocidades. Es claro que la curva descrita por el extremo del vector velocidad es en este caso una circunferencia, centrada en el origen del espacio de velocidades y cuyo radio está dado por la velocidad circular constante. Para un planeta que describe una órbita elíptica, la velocidad de rotación del vector velocidad no es uniforme como tampoco la dirección y magnitud de su variación en el tiempo. Sin embargo, estas variaciones se producen de una manera tal que el extremo del vector genera una circunferencia en el espacio de velocidades; el centro de la misma no se ubica en el origen de coordenadas en dicho espacio.

En el sistema del centro de masa del Sol de masa M y un planeta de masa m la fuerza de interacción \mathbf{F}^{int} entre ambos es

$$\mathbf{F}^{int} = -\frac{GMm}{\rho^3}\boldsymbol{\rho} \quad (1)$$

donde $G = 6.67300 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ es la *constante de gravitación* de Newton y $\boldsymbol{\rho}$ el radio vector desde el Sol al planeta.

Utilizando las ecuaciones de Newton y las coordenadas del centro de masa se arriba a la ecuación de movimiento de una partícula de masa reducida

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \quad (2)$$

moviéndose bajo la influencia de una fuerza de atracción gravitatoria que apunta hacia el origen del sistema de coordenadas. Así, el problema original de dos cuerpos se reduce al problema de un cuerpo equivalente de masa μ bajo la influencia de una fuerza central.

Como la única fuerza que actúa es independiente del tiempo y conservativa, la energía E es una constante de movimiento. El vector impulso angular \mathbf{L} respecto al origen es también una constante de movimiento debido a que la fuerza está dirigida hacia el origen, y por tanto el momento respecto a ese punto es nulo. No trataremos en este trabajo la tercera cantidad conservada en este problema, el vector de Lenz.

Para deducir la conservación del impulso angular consideramos su definición

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p} \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ es el radio vector ya definido y \mathbf{p} el impulso –o cantidad de movimiento–lineal. Usamos coordenadas polares (ρ, θ, z) con vectores unitarios asociados $(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}})$ que satisfacen la regla usual de la mano derecha para los productos vectoriales cíclicos.

El impulso lineal de la masa reducida es

$$\mathbf{p} = \mu \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \quad (4)$$

La variación temporal del impulso angular está dada por

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\rho} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}^{int} \quad (5)$$

El primer término del tercer miembro es siempre nulo pues $\mathbf{v} // \mathbf{p}$, el segundo término también es nulo pues para una fuerza central se cumple $\mathbf{F}^{int} // \boldsymbol{\rho}$. Por tanto vemos que para una fuerza central

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (6)$$

En consecuencia

$$\mathbf{L} = \mu\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{es constante} \quad (7)$$

La conservación de la dirección de \mathbf{L} implica que la órbita de la masa reducida se mantiene en un plano normal a la dirección de dicho vector. La conservación del módulo L será utilizada más adelante.

II. CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO

Como la fuerza es conservativa, existe una función energía potencial $U(\rho)$:

$$U(\rho) = -\frac{GmM}{\rho} = -\frac{\gamma\mu}{\rho} \quad (8)$$

donde $\gamma = G(M + m)$; si se satisface que $M \gg m$, resulta $\gamma \approx GM$, que es el *parámetro gravitacional estándar* del Sol. La energía total constante es la suma de la energía cinética más la energía potencial

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\gamma\mu}{\rho} \quad (9)$$

Podemos utilizar la conservación del impulso angular para reescribir la energía en la forma

$$E = \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\gamma\mu}{\rho} \quad (10)$$

Esta forma es similar a la energía para el movimiento en una dimensión espacial de un cuerpo de masa μ con energía cinética $\frac{\mu}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2$, en presencia del potencial efectivo

$$V(\rho) = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\gamma\mu}{\rho} \quad (11)$$

El primer término es el llamado *potencial centrífugo* y el segundo representa la interacción gravitatoria. El potencial efectivo se representa en la figura 1.

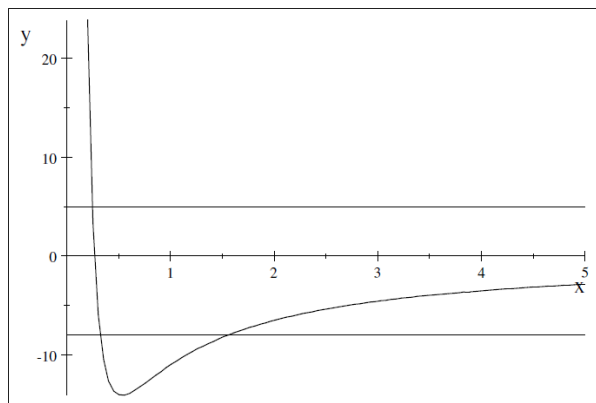


Figura 1. Potencial efectivo para el problema de Kepler. Las unidades en los ejes son arbitrarias.

El mínimo del potencial efectivo corresponde al punto ρ_0 donde

$$\frac{dV(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho_0} = 0 \quad (12)$$

y está dado por $\rho_0 = \frac{L^2}{\gamma\mu^2}$. La energía potencial efectiva en este punto vale

$$V_0 = -\frac{1}{2L^2}\gamma^2\mu^3 \quad (13)$$

En la figura 1, la línea horizontal en $E = 5$ corresponde a un movimiento no acotado; la línea en $E = -8$ a un movimiento acotado, restringido a la región entre los dos valores de ρ donde $E = V(\rho)$. Como para una órbita cerrada la energía total es negativa, en lo que sigue usaremos $E = -|E|$ donde $|E|$ es el valor absoluto de la energía.

Los valores máximo y mínimo de ρ corresponden al afelio y perihelio (puntos de retorno para el movimiento unidimensional) y están dados por

$$\rho_{A/P} = \frac{\gamma\mu}{2|E|} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\gamma^2\mu^3}} \right) \quad (14)$$

III. ÓRBITA PLANETARIA Y HODÓGRAFA

Para determinar la órbita del planeta (Derbes, 2001; Davis, 2011; MIT, 2014; Timoschenko y Young, 1951) y la hodógrafa partimos de la segunda ley de Newton para la masa reducida

$$\mu\mathbf{a} = \mathbf{F}^{int} \quad (15)$$

que implica

$$\mu\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma\mu}{\rho^3}\boldsymbol{\rho} \quad (16)$$

Multiplicando vectorialmente ambos miembros de esta ecuación a la izquierda por el vector posición $\boldsymbol{\rho}$ y utilizando la identidad $\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\rho} = 0$ obtenemos

$$\mu\boldsymbol{\rho} \times \ddot{\boldsymbol{\rho}} = 0 \quad (17)$$

de aquí recuperamos $\frac{dL}{dt} = 0$.

Reemplazando el valor de $1/\rho^2$ de la Ec. (7) en la ecuación de movimiento, Ec. (16), obtenemos:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma}{\rho^2} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} = -\frac{\gamma\mu}{L} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (18)$$

Por otra parte notamos la identidad

$$\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\theta} \cos \theta \hat{\boldsymbol{x}} + \dot{\theta} \sin \theta \hat{\boldsymbol{y}} = \frac{d}{dt} (\sin \theta \hat{\boldsymbol{x}} - \cos \theta \hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{d}{dt} (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{z}}) = -\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (19)$$

que implica

$$\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \quad (20)$$

que es una propiedad de las coordenadas polares. Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma\mu}{L} \frac{d}{dt} (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{z}}) = \frac{\gamma\mu}{L} \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (21)$$

Esta ecuación puede ser integrada una vez para obtener

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{v}_0 = -\frac{\gamma\mu}{L} (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{z}}) = \frac{\gamma\mu}{L} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (22)$$

donde \mathbf{v}_0 es una constante de integración vectorial. Multiplicando escalarmente esta ecuación miembro a miembro por sí misma obtenemos

$$(\dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{v}_0) \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{v}_0) = R^2 \quad (23)$$

donde

$$R = \frac{\gamma\mu}{L} \quad (24)$$

Introducimos coordenadas polares para las velocidades (ver figura 2) $\hat{\rho} = (v, \phi)$, $v_0 = (v, \alpha)$ y desarrollando la Ec. (23) obtenemos

$$v^2 + v_0^2 - 2vv_0 \cos(\phi - \alpha) = R^2 \quad (25)$$

Esta es la ecuación, en coordenadas polares (v, ϕ) , de una circunferencia de radio R centrada en el punto de coordenadas polares (v_0, α) donde α es el ángulo del vector v_0 con el eje y . Esta circunferencia es la hodógrafa, lugar geométrico de los extremos del vector velocidad a medida que el planeta se mueve alrededor de su órbita (Apostulatos, 2003; Butikov, 2000).

A. Órbita

Para obtener la órbita en el espacio real debemos integrar la ecuación (22) una vez más. Para ello la reescribimos en la forma

$$\dot{\rho} = \frac{\gamma\mu}{L} \hat{\theta} + v_0 \quad (26)$$

Multiplicando vectorialmente ambos miembros a la izquierda por el vector $\mu\rho$ obtenemos

$$\mu\rho \times \dot{\rho} = \frac{\gamma\mu}{L} \mu\rho \times \hat{\theta} + \mu\rho \times v_0 \quad (27)$$

Es posible demostrar las siguientes propiedades

TABLA I. El impulso angular apunta en dirección \hat{z}

$L =$	$\mu\rho \times \dot{\rho} =$	$L\hat{z}$
$\mu\rho \times \hat{\theta} =$	$\mu\rho\hat{\rho} \times \hat{\theta} =$	$\mu\rho\hat{z}$
$\mu\rho \times v_0 =$	$\mu\rho v_0 \hat{\rho} \times \hat{v}_0 =$	$\mu\rho v_0 \sin(\theta - \alpha) \hat{z}$

Vemos que todos los términos de la Ec. (27) son vectores dirigidos en la dirección \hat{z} . Después de algunas transformaciones obtenemos de la Ec. (22) la igualdad

$$\rho = \frac{L}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (28)$$

Esta es la ecuación de una cónica donde $\mathcal{L} = \frac{L^2}{\gamma\mu^2}$ es el *latus rectum* (cuerda por el foco paralela a la directriz) y $\varepsilon = \frac{v_0 L}{\mu\gamma}$ es la excentricidad. Esta ecuación corresponde a una cónica con su eje principal a lo largo del eje x . Según cuál sea el valor de ε la curva es una elipse, una parábola o una hipérbola. Para una dada masa m del planeta y M del Sol, la energía total E y el impulso angular L determinan las características de la órbita. La siguiente tabla resume las propiedades de los tres tipos de órbita

TABLA II. Excentricidad y correspondiente órbita

Excentricidad	Curva	Órbita
$\varepsilon > 1$	Hipérbola	abierta
$\varepsilon = 1$	Parábola	abierta
$\varepsilon < 1$	Elipse	cerrada
$\varepsilon = 0$	Circunferencia	cerrada

Analizaremos ahora en detalle cada caso.

B. Órbita elíptica

Consideramos en primer lugar el caso $\varepsilon < 1$ de una elipse; resulta conveniente hacer la sustitución $\mathcal{L} = a(1 - \varepsilon^2)$ donde a es el semieje mayor (distancia desde el centro a los vértices) para obtener

$$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \theta} \tag{29}$$

Para determinar la forma de la curva es común usar, en lugar de la excentricidad ε , el semieje menor b (segmento perpendicular a a por el centro); con estos parámetros definimos la distancia focal $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (distancia desde el centro C a cualquiera de los focos); la excentricidad viene dada entonces por $\varepsilon = \frac{c}{a}$ y la directriz por $d = \frac{a}{\varepsilon}$.

Una órbita elíptica se muestra en la figura 2.

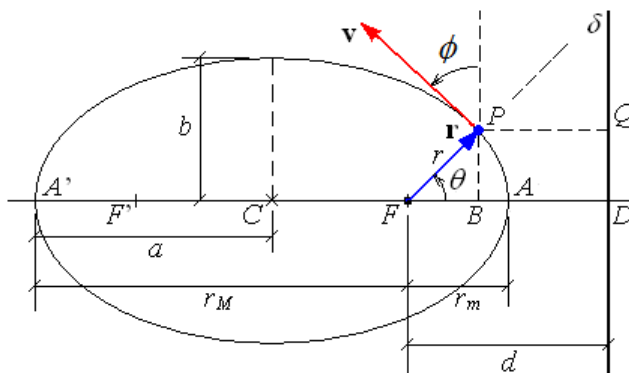


FIGURA 2. Órbita elíptica. Se muestran los focos F y F' , los semiejes mayor y menor a y b , y la distancia d a la directriz.

Notamos las siguientes relaciones geométricas

- *Latus rectum* $\mathcal{L} = \frac{L^2}{\gamma\mu^2} = \varepsilon d$ donde d es la distancia desde el foco a la directriz.
- Perihelio y afelio están dados por

$$\rho_P = a(1 - \varepsilon) = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon} \tag{30}$$

$$\rho_A = a(1 + \varepsilon) = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon} \tag{31}$$

- Semieje mayor a es

$$a = \frac{\rho_A + \rho_B}{2} = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2} \tag{32}$$

Para relacionar los parámetros geométricos de la trayectoria con la dinámica del planeta recordamos la expresión para la energía total Ec. (14). Vimos que los valores máximo y mínimo de ρ para una dada órbita están dados en la Ec. (15). Además tenemos las relaciones

$$a = \frac{\rho_A + \rho_P}{2} = \frac{\gamma\mu}{2|E|} \tag{33}$$

$$c = \frac{\rho_A - \rho_P}{2} = \frac{\gamma\mu}{2|E|} \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\gamma^2\mu^3}} \tag{34}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\gamma^2\mu^3}} \tag{35}$$

Podemos utilizar la conservación del impulso angular para evaluar la velocidad en el perihelio y en afelio y obtenemos

$$v_{P/A} = \frac{L}{\mu\rho_{P/A}} = \frac{L}{\mu a(1 \mp \varepsilon)} \tag{36}$$

IV. PROPIEDADES DE LA HODÓGRAFA

Si bien en los tres casos de movimiento kepleriano es posible encontrar el radio de la hodógrafa mediante la relación $R = \gamma\mu/L$ y determinando el parámetro gravitacional γ a partir de la dinámica, para la elipse y la parábola, resulta más simple usar un método directo, imponiendo la condición de que la circunferencia Ec. (23) pase por dos puntos característicos que podemos identificar. En cambio, para el caso de las órbitas hiperbólicas resulta más simple aplicar el primer método.

A. Órbita elíptica

Vimos que la hodógrafa en coordenadas polares está dada por la Ec. (25). Podemos elegir $\alpha = 0$ y determinar v_0 imponiendo que la Ec. (25) se satisfaga para el perihelio y para el afelio, es decir para $v = v_p$ y para $v = v_A$. Así obtenemos las dos ecuaciones

$$v_p^2 + v_0^2 - 2v_p v_0 = R^2 \quad (37)$$

$$v_A^2 + v_0^2 + 2v_A v_0 = R^2 \quad (38)$$

de donde sigue

$$R = (v_p - v_A) \quad (39)$$

$$v_0 = \frac{1}{2}(v_p + v_A) \quad (40)$$

La figura 3 muestra una órbita elíptica y la correspondiente hodógrafa.

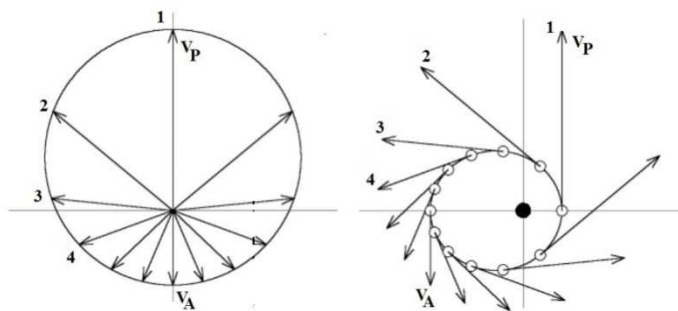


FIGURA 3. Órbita elíptica (der.) y correspondiente hodógrafa (izq.).

A medida que el planeta se mueve desde el perihelio al afelio (mitad superior de la órbita) por los puntos 1, 2, 3, 4 en el espacio (Figura 3, der.) los vectores velocidad en el espacio de las velocidades se mueven a través del sector superior izquierdo de la hodógrafa (Figura 3, izq.). Cuando el planeta se mueve del afelio al perihelio (parte inferior de la órbita) en el espacio real, los vectores en el espacio de velocidad recorren la mitad derecha de la hodógrafa.

Mostraremos ahora la relación entre las velocidades en el perihelio, en el afelio y en los covértices que se puede obtener de manera simple a partir de la hodógrafa. Comenzamos notando el teorema que dice: *todo triángulo inscripto en la circunferencia, que tiene un diámetro como uno de sus lados, es un triángulo rectángulo*. Este es el caso del triángulo APC indicado en la figura 4.

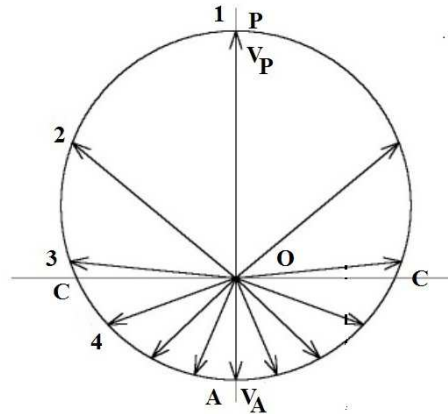


FIGURA 4. Hodógrafo de la elipse mostrando los puntos mencionados en el texto.

Por el teorema de Pitágoras tenemos

$$(v_A + v_P)^2 = (AC)^2 + (PC)^2 \tag{41}$$

Por otra parte si consideramos los triángulos rectángulos AOC y OPC y llamamos v_C a la velocidad en el covértice, tenemos las siguientes igualdades

$$v_C^2 + v_A^2 = (AC)^2 \tag{42}$$

$$v_C^2 + v_P^2 = (PC)^2 \tag{43}$$

Sumando miembro a miembro estas dos ecuaciones y reemplazando en la ecuación anterior obtenemos, después de algunas simplificaciones

$$v_C = \sqrt{v_A v_P} \tag{44}$$

es decir, la velocidad en el covértice es la media geométrica de las velocidades en el perihelio y el afelio.

B. Trayectoria parabólica

Las trayectorias parabólicas corresponden a un movimiento no-periódico con energía mecánica total nula ($E = 0$), intermedio entre las órbitas elípticas periódicas cerradas ($E < 0$) y las trayectorias hiperbólicas abiertas ($E > 0$). Estas trayectorias pueden corresponder a un cometa que ingresa al sistema solar con una velocidad tal que en el perihelio alcanza la velocidad de escape y por tanto no regresa. En efecto, si ponemos $E = 0$ en la Ec. (14) y usamos el hecho que en el perihelio $\frac{d\rho}{dt} = 0$, tenemos $\frac{L^2}{2\mu\rho^2} = \frac{\gamma\mu}{\rho_P}$ y por

tanto $v_P = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_P}}$ que es el conocido valor de la velocidad de escape.

Desde el punto de vista geométrico, la parábola de excentricidad $\epsilon = 1$, ocupa una posición intermedia entre la elipse con $\epsilon < 1$ y la hipérbola con $\epsilon > 1$. Podemos obtener la trayectoria parabólica directamente a partir de la órbita elíptica tomando $\epsilon = 1$,

$$\rho = 2 \frac{\rho_P}{1 + \cos\theta} \tag{45}$$

Vemos que la parábola queda determinada sólo por ρ_P , que es un factor de escala: esto significa que, a menos de traslaciones y rotaciones, *todas las parábolas son semejantes entre sí*.

Suponemos que el movimiento tiene lugar en sentido antihorario, a lo largo de una parábola simétrica que se abre horizontalmente a lo largo del eje x negativo, con vértice en el punto de coordenadas cartesianas $(\rho_P, 0)$, foco en $(0,0)$ y directriz en $x = 2\rho_P$.

Dado que la trayectoria parabólica puede verse como el límite para $E \rightarrow 0$ de una órbita elíptica, podemos obtener la distancia de máximo acercamiento evaluando el límite $E \rightarrow 0$ del perihelio de una órbita elíptica, es decir:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \rho_P = -\lim_{E \rightarrow 0} \frac{\gamma\mu}{2E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\gamma^2 \mu^3}} \right) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\gamma \mu^2} \quad (46)$$

Un cálculo análogo para el afelio ρ_A diverge, indicando que ese punto se ha movido al infinito. Esta forma de ρ_P también surge de la condición $V(\rho) = 0$ (Ver figura 1), es decir la solución de la ecuación

$$V(\rho) = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\gamma\mu}{\rho} = 0 \rightarrow \rho_P = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\gamma \mu^2} \quad (47)$$

Para determinar el radio y el centro de la hodógrafa imponemos que la ecuación (25) se satisfaga para $v = 0$ –correspondiente a los puntos del infinito– y para $v = v_P$, el perihelio. Así se obtiene $R = \frac{v_P}{2}$, $v_0 = -\frac{v_P}{2}$. La circunferencia es tangente al eje v_x en el origen del espacio de velocidades. Dado que en el perihelio el cometa tiene la máxima velocidad, la que luego tiende a cero a medida que se aleja hacia el infinito, los vectores velocidad barren todo el interior del círculo de diámetro v_P .

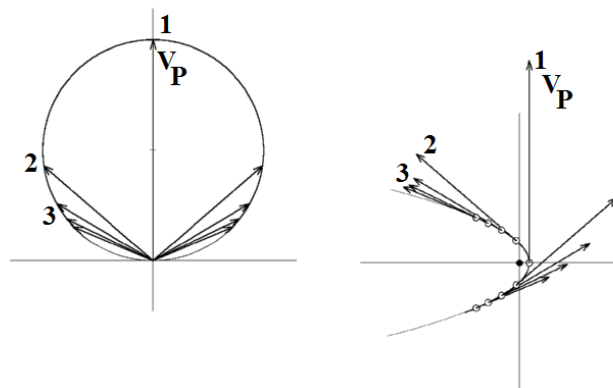


FIGURA 5. Trayectoria parabólica (der.) y correspondiente hodógrafa (izq).

C. Trayectoria hiperbólica.

Esta es también una trayectoria abierta, que en astronomía corresponde al movimiento de un cometa u objeto extra solar con energía mecánica total $E > 0$; una aplicación clásica en física atómica es la dispersión de Rutherford. Suponemos que el movimiento tiene lugar en la rama izquierda de una hipérbola "abierta de izquierda a derecha", dada por la ecuación

$$\rho = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (48)$$

Como en el caso de la elipse, la forma de la hipérbola se define por dos parámetros. En la forma polar esos son el semieje mayor a (distancia del centro al uno de los vértices) y la excentricidad ε . Pueden considerarse también semieje mayor a y el semieje menor b (segmento perpendicular a desde cada vértice a las asíntotas). Con ellos se define la distancia focal $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (distancia desde el centro C cualquiera de los focos) y la excentricidad $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

La pendiente de las asíntotas $\tan \theta = \pm \frac{b}{a}$ determina la dirección de la velocidad entrante v_{ent} y saliente v_{sal} , que tienen el mismo módulo, $v_{ent} = v_{sal} = v_\infty$.

El impulso angular del cometa respecto al centro de fuerzas, el foco, es una constante de movimiento. Por ello tenemos

$$L = \mu v_\infty D = \mu v_P \rho_P \quad (49)$$

donde v_P y ρ_P son la velocidad y el radio vector en el perihelio,

$$\rho_P = c - a = a(\varepsilon - 1) \quad (50)$$

Necesitamos la distancia D de la asíntota entrante de pendiente $\tan \theta$, al foco $(-c, 0)$, cantidad conocida en física atómica como parámetro de impacto. Puede mostrarse que esta distancia vale $D = b$. La velocidad en el perihelio resulta entonces

$$v_P = \frac{b}{\rho_P} v_\infty = \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}} v_\infty \tag{51}$$

A distancia infinita del Sol la energía es sólo cinética, $E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2$ pues la energía gravitatoria es nula; por tanto la velocidad asíntótica vale $v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$. Para ello recurrimos a la conservación de energía e igualamos la energía total en el perihelio con aquella en el infinito, de donde obtenemos

$$\gamma = \frac{\rho_P}{2} (v_P^2 - v_\infty^2) \tag{52}$$

Reemplazando aquí $\rho_P = (\varepsilon - 1)a$ y v_P obtenido de la conservación del impulso angular tenemos

$$v_P = \frac{b}{\rho_P} v_\infty = \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}} v_\infty \tag{53}$$

de donde sigue

$$R = \frac{\gamma \mu}{L} = \frac{\mu \rho_P}{2} \left(\frac{v_P^2}{L} - \frac{v_\infty^2}{L} \right) = \frac{1}{2} \left(v_P - \frac{\rho_P}{b} v_\infty \right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} v_\infty = \frac{1}{\varepsilon+1} v_P \tag{54}$$

Para dibujar la hodógrafa notamos que la rapidez en el perihelio es la más grande y que las velocidades entrante y saliente ($\mathbf{v}_{ent}, \mathbf{v}_{sal}$) tienen los menores módulos y se encuentran simétricamente ubicadas a ambos lados de \mathbf{v}_P , limitando un haz que contiene todas la demás velocidades: por lo tanto son tangentes a la hodógrafa y normales al radio. El centro se ubica en $(0, -v_0)$ y los vectores $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{ent}, \mathbf{R})$ forman un triángulo rectángulo. Luego se satisface la relación

$$v_0 = \sqrt{v_\infty^2 + R^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} v_\infty \tag{55}$$

Una vez dibujadas las velocidades entrante y saliente y la velocidad en el perihelio, la hodógrafa queda unívocamente determinada como la circunferencia tangente a las velocidades asíntóticas y que pasa por el extremo del vector velocidad en el perihelio. La figura 6 muestra la situación.

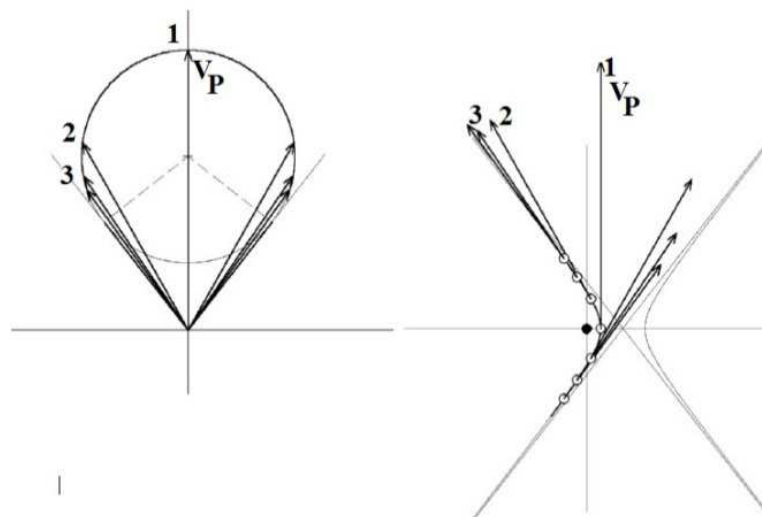


FIGURA 6. Trayectoria hiperbólica (der.) y hodógrafa (izq.).

Es notable que en este caso el origen de las coordenadas en el espacio de velocidades quede fuera de la hodógrafa.

REFERENCIAS

Apostulatos, T. A. (2003). Hodograph: A useful geometrical tool for solving some difficult problems in dynamics. *American Journal of Physics*, 71, pp. 261-266.

Beckman, B. (2006). Feynman Says: "Newton implies Kepler, No Calculus Needed! *The Journal of Symbolic Geometry*, 1, <http://weblogs.asp.net/brianbec>.

Butikov, E. I. (2000). The velocity hodograph for an arbitrary Keplerian motion. *Eur. J. Phys.*, 21, pp 1-10.

Davis, E. D. (2011), Orbits of the Kepler problem via polar reciprocals. *Am J. Phys.*, 79 (12), pp. 1246-1249.

Derbes, D. (2001). Reinventing the wheel: Hodographic solutions to the Kepler problems. *Am. J. Phys.*, 69, pp 481- 489.

Hamilton, W. R. (1846). The Hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the Newtonian law of attraction, *Proc. R. Ir. Acad.*, 3, pp. 344-353.

Maxwell, J. C. (1876). Matter and Motion, *Society for promoting christian knowledge New York*, Reeditado por Dover, New York 1991.

Goodstein, David and Judith (1996): Feynman's Lost Lecture, W. W. Norton, New York.

MIT (2014) <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-physics-i-classical-mechanics-fall-2010/central-force-motion/central-force-motion-and-the-kepler-problem/> [última vista 10/10/2014]

Timoschenko, S. y Young, D.H. (1951), *Dinámica avanzada*. Buenos Aires: Librería Hachette S.A.